Courons sous la pluie…

« Quand on est pris dans une averse soudaine, on peut, soit courir le plus vite possible, soit s'élancer pour s'abriter sous les avancées des toits des maisons qui bordent le chemin. De toute façon, on sera mouillé. Si on se préparait auparavant mentalement, à l'idée d'être trempé, on serait en fin de compte fort peu contrarié à l'arrivée de la pluie. On peut appliquer ce principe avec profit dans toutes les situations. »

« HAGAKURE » LE LIVRE SECRET DES SAMOURAIS, Jocho Yamamoto (1659-1719)

Se retrouver pris sous une averse soudaine sans parapluie est une expérience instructive. Sans pour autant rentrer dans la psychologie très particulière du samouraï, on désire souvent simplement s'épargner d'être complètement trempé … ce qui permet alors surtout de s'immerger dans un bon petit problème de physique.

En effet, imaginons un individu devant aller d'un point A à un point B, sans possibilité de cheminer sous abri, et subissant une pluie régulière qui ne semble pas vouloir cesser. Comme dans la citation, cet individu peut se poser la question de l'attitude à adopter, ou tout au moins de l'allure à choisir. Est-il avantageux de courir ou plutôt de marcher lentement, de se courber ou se redresser, ou encore de choisir une vitesse ou un trajet bien déterminés ?

Figure 1.1 : ***Courir ou ne pas courir ?***

La question qui vous est alors posée est la suivante :

« Sous une averse, que faire pour être mouillé le moins possible dans un déplacement contraint à découvert ? »

Tout d'abord, posez-vous le problème. Définissez quelques grandeurs d'intérêt et essayez de construire l'amorce des raisonnements.

Voici quelques pistes pour vous aider :

- La première question qu'on peut se poser est « qu'est-ce que la pluie, et surtout comment la modéliser pour pouvoir dégager un comportement optimal à adopter ? » Quelle grandeur physique sera mise en jeu si un individu se retrouve sous une pluie supposée régulière et homogène ?

- Ensuite, on peut s'interroger sur comment formaliser le fait d'être « mouillé par cette pluie ». C'est là qu'il va falloir définir et manipuler une grandeur représentant la quantité de pluie ou de gouttes que l'individu intercepte durant son trajet. Cette grandeur, il va falloir « l'exprimer », lui donner une écriture mathématique formelle pour pouvoir l'étudier. Cette écriture devrait dépendre de la (ou des) grandeur(s) introduite(s) dans le modèle de pluie, de la vitesse de déplacement de la personne, des caractéristiques géométriques de cette personne, etc.

- Une fois ces grandeurs mises en évidence et reliées par une ou plusieurs formules, il faudra penser à chiffrer des ordres de grandeurs, afin de confronter les écritures mathématiques avec des conditions réalistes.

- Enfin, les caractéristiques de la pluie peuvent être assez diverses. Est-ce une pluie verticale, oblique ? Le problème posé est il en deux ou trois dimensions ? Quand les paramètres ont un effet important sur la complexité du problème, il est important de savoir structurer son raisonnement. Il est ainsi d'usage de commencer par l'étude d'un cas simple, puis de compliquer progressivement l'étude en se servant des premiers résultats pour avancer.

Saurez-vous trouver les différentes réponses à la question posée ? Vaut-il mieux courir ou rester calme sous la pluie pour minimiser la quantité de pluie qu'on reçoit ?

Première analyse et premiers résultats

Commençons par un petit dessin. La *figure 1.2* représente de façon sommaire une personne qui de déplace du point A vers le point B sous la pluie. Pour l'instant, on supposera la pluie parfaitement verticale afin de simplifier l'approche. L'axe géométrique reliant les points A et B sera appelé « axe x » ; la pluie elle tombant suivant « l'axe z ».

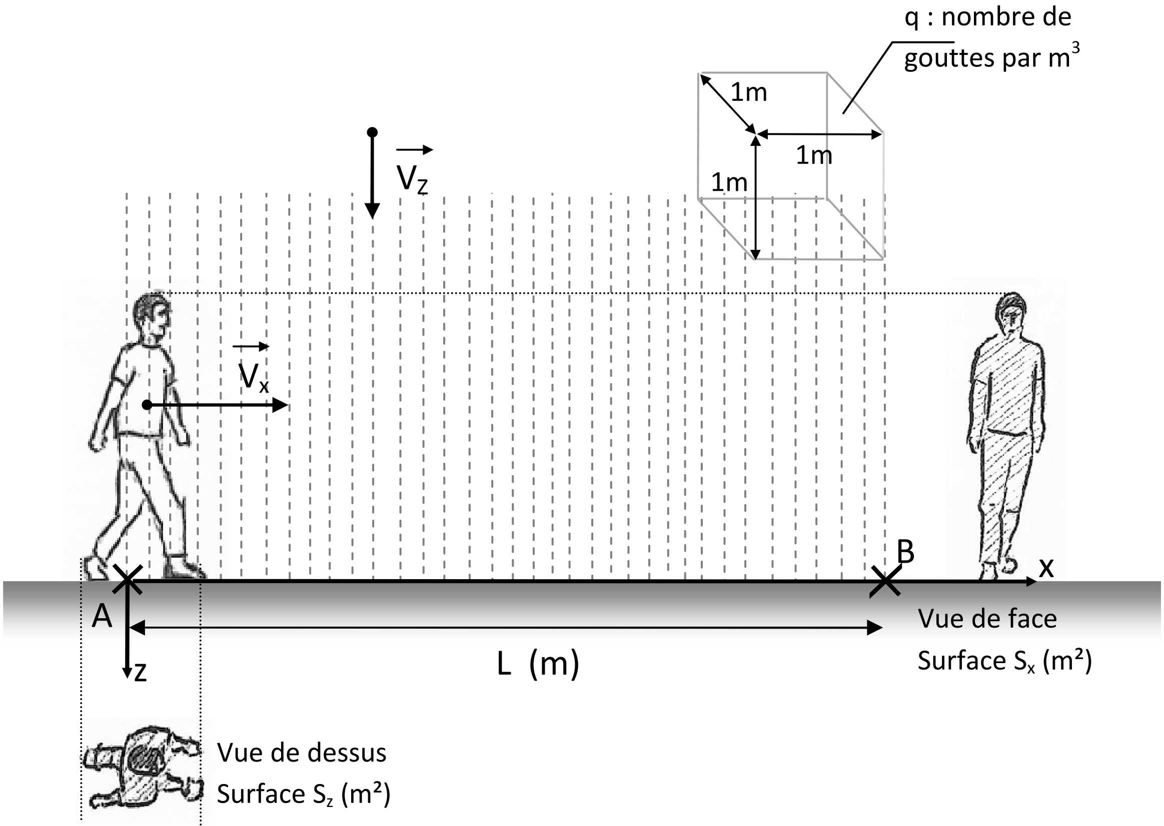

Figure 1.2 : Schéma du problème avec pluie verticale

La première question à laquelle il faut répondre est celle du « modèle de la pluie ». En effet ce phénomène météorologique se caractérise par la présence dans l'air ambiant de gouttes d'eau liquide qu'on peut supposer comme uniformément réparties. Dans ce cadre particulier, il existe dans chaque volume d'air considéré un certain nombre (moyen) de gouttes de pluies, ce qui correspond également à un certain volume et à une certaine masse d'eau. Dans ce cadre, choisissons de considérer la grandeur physique « densité volumique de gouttes de pluie », autrement dit le nombre de gouttes par mètre cube d'air dans l'atmosphère local. Cette quantité sera facile, au besoin, à convertir en volume ou en masse d'eau si on connait les caractéristiques géométriques des gouttes.

Ainsi, on part de : $q = \frac{nombre\ de\ gouttes}{m^3}$ la densité volumique de gouttes de pluie.

Ensuite, la pluie est caractérisée par une vitesse de chute collective suivant l'axe z. Appelons donc V_z le module (la valeur) de la vitesse de la pluie suivant l'axe z.

Par ailleurs, notons V_x la vitesse horizontale, suivant l'axe x, du personnage.

Ensuite, appelons S_z la surface de la personne vue de dessus, autrement dit la seule surface supérieure de sa tête et de ses épaules qui reçoivent la pluie verticale.

De la même manière, appelons S_x la surface de la personne qui fait face à la pluie lors du mouvement.

Il est maintenant le temps de déterminer les expressions des quantités de gouttes interceptées lors du déplacement. Pour cela, remarquons que la personne se « fait mouiller » par la pluie de façon permanente sur la tête et les épaules, autrement dit sur la surface S_z, mais également sur la surface avant S_x.

Durant une seconde du déplacement, la surface S_z intercepte une hauteur V_z (en m/s) de pluie caractérisée par q gouttes par m^3. La quantité reçue s'écrit donc : $\Delta Q_z = q.S_z.V_z$.

Durant cette seconde, le surface S_x qui fait face à la pluie intercepte la longueur V_x (en m/s) de pluie également caractérisée par q gouttes par m^3. La quantité reçue s'écrit donc : $\Delta Q_x = q.S_x.V_x$.

La quantité totale de pluie interceptée <u>par seconde</u> est tout simplement la somme de ces deux expressions : $\Delta Q = \Delta Q_x + \Delta Q_z = q.S_x.V_x + q.S_z.V_z$

Nota Bene : Le lecteur vérifiera que ΔQ représente bien un « nombre de gouttes » grâce aux unités des grandeurs présentes dans l'équation.

Il ne reste plus qu'à formuler combien de secondes va durer le trajet pour formaliser la quantité totale reçue entre les points A et B par notre personnage.

Si la vitesse de déplacement est constante, elle s'écrit tout simplement comme la distance parcourue L, divisée par le temps du parcours t_{AB} , soit donc : $V_x = \frac{L}{t_{AB}}$.

On obtient donc : $t_{AB} = \frac{L}{V_x}$.

Il vient alors la quantité totale de pluie : $Q = \Delta Q \times t_{AB} = (\ q.S_x.V_x + q.S_z.V_z) \times \frac{L}{V_x}$

Ou encore : $$Q = q.S_x.L + q.S_z.L.\frac{V_z}{V_x}$$

Exploitation et interprétation

Il n'est pas franchement besoin de faire d'étude mathématique de cette expression pour en extraire des conclusions, en effet :

- Si la vitesse V_x de déplacement de la personne est nulle, la quantité reçue tend vers l'infini. C'est bien normal puisqu'alors la personne immobile recevra une pluie que nous avons supposée continue et sans fin…
- Si la vitesse V_x est « très grande » par rapport à V_z, le second membre de l'expression deviendra négligeable par rapport au premier, qui lui est constant et représente la quantité de pluie interceptée horizontalement entre A et B, ce qui effectivement ne dépend pas du temps ni de la vitesse. La valeur limite qui sépare ces deux comportements peut être mise en évidence en écrivant que $q.S_x.L \gg q.S_z.L.\frac{V_z}{V_x}$. Pour obtenir une valeur exploitable, on retiendra « un facteur 10 », soit donc $q.S_x.L > 10 \times q.S_z.L.\frac{V_z}{V_x}$, ou encore : $V_x > 10.V_z.\frac{S_z}{S_x} = V_{limite}$.
- La *figure 1.3* représente ainsi l'allure de la quantité Q de gouttes reçue par notre personnage en fonction de la vitesse de déplacement V_x.

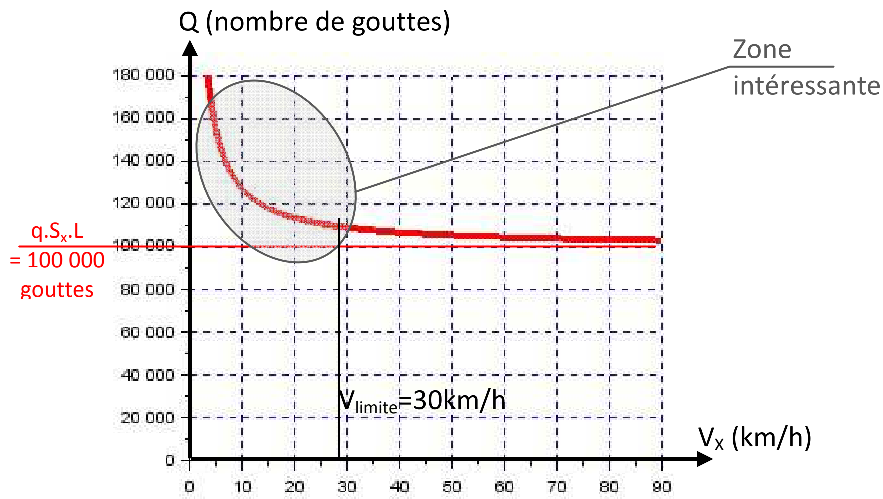

Figure 1.3 : Courbe Q en fonction de V_x

- Cette courbe a été tracée en adoptant des valeurs numériques particulières pour les différentes grandeurs. Les valeurs suivantes ont été utilisées : $V_z = 5 \text{ m/s}$, soit donc 18 km/h ; $S_z = 0{,}15 \text{ m}^2$; $V_x = \text{de } 1 \text{ à } 90 \text{ km/h}$; $S_x = 1 \text{ m}^2$; $L = 100 \text{ m}$; $q = 1000 \text{ gouttes / m}^3$. Avec ces valeurs, $V_{limite} \approx 30 \text{ km/h}$ et $q.S_x.L = 100000$.
- La conclusion est donc relativement claire : la quantité de pluie reçue par la personne varie fortement entre 1km/h et environ 30 km/h (quasiment d'un facteur deux). Au-delà, la quantité de pluie reçue ne varie que peu et il semble inutile de dépasser de façon conséquente la vitesse limite (qui a été estimée à 30 km/h).

Allons plus loin …

En réalité, il est important de ne pas non plus trop simplifier le problème. Il est très courant, surtout par temps d'orage, que la pluie ne soit pas verticale à cause du vent. Dans ce cas, il est nécessaire de reprendre notre étude sur la base de la *figure 1.4*.

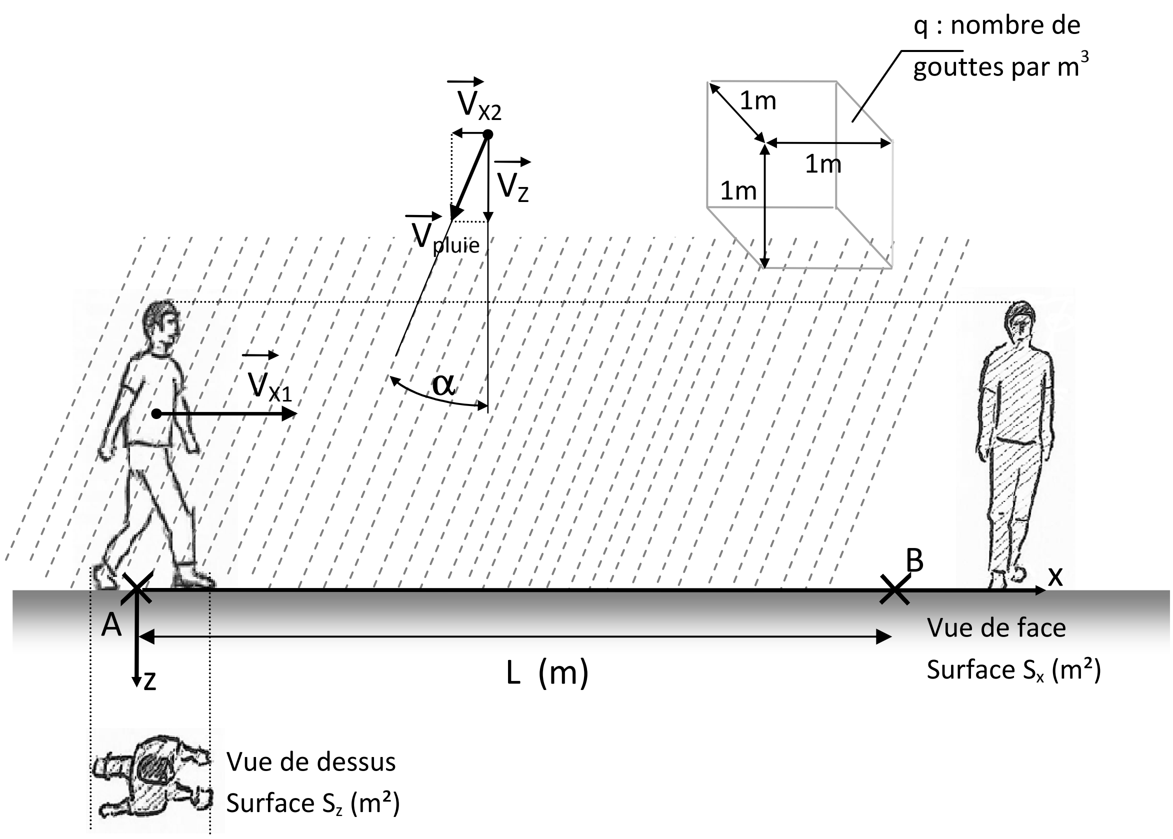

Figure 1.4 : ***Schéma du problème avec pluie inclinée d'un angle*** α

Dans le contexte précis de cette figure, la vitesse de la pluie qui est inclinée d'un angle noté α par rapport à la verticale, se décompose en deux vecteurs : $\overrightarrow{V_Z}$ qui est vertical et toujours dirigé vers le bas, et $\overrightarrow{V_{x2}}$ qui est horizontal et de sens opposé au vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{x1}}$ qui décrit toujours le déplacement de la personne. A présent, cette dernière reçoit toujours de la pluie verticalement sur la surface S_z, et intercepte toujours toute la pluie se trouvant sur le trajet de A vers B sur la surface S_x mais avec la vitesse relative vue par la personne $V_{x1} + V_{x2}$.

Ainsi, la nouvelle expression de la quantité de pluie reçue par l'individu sera :

$$Q = \Delta Q \times t_{AB} = (\, q.S_x.(V_{x1} + V_{x2}) + q.S_z.V_z) \times \frac{L}{V_{x1}}$$

Ou encore : $$Q = q.S_x.L.\frac{V_{x1}+V_{x2}}{V_{x1}} + q.S_z.L.\frac{V_z}{V_{x1}}$$

Il est alors possible de tracer la nouvelle courbe de la quantité de pluie reçue, avec par exemple les valeurs suivantes :

$V_{pluie} = 5\ \mathrm{m/s}$, soit donc 18 km/h ; Inclinaison de la pluie : $\alpha = 30°$, d'où $V_{x2} = V_{pluie}.\sin(\alpha) = 9\ \mathrm{km/h}$ et $V_z = V_{pluie}.\cos(\alpha) = 15{,}58\ \mathrm{km/h}$.

$S_z = 0{,}15\ \mathrm{m}^2$; $V_{x1} = \mathrm{de} - 90\ \mathrm{à}\ 90\ \mathrm{km/h}$; $S_x = 1\ \mathrm{m}^2$; $L = 100\ \mathrm{m}$; $q = 1000\ \mathrm{gouttes\ /\ m}^3$. Avec ces valeurs, $q.S_x.L = 100000$ représente toujours la quantité de pluie limite obtenue par un déplacement instantané. La *figure 1.5* représente ainsi la courbe obtenue pour cet ensemble précis de valeurs, et permet de déceler quelque chose d'intéressant :

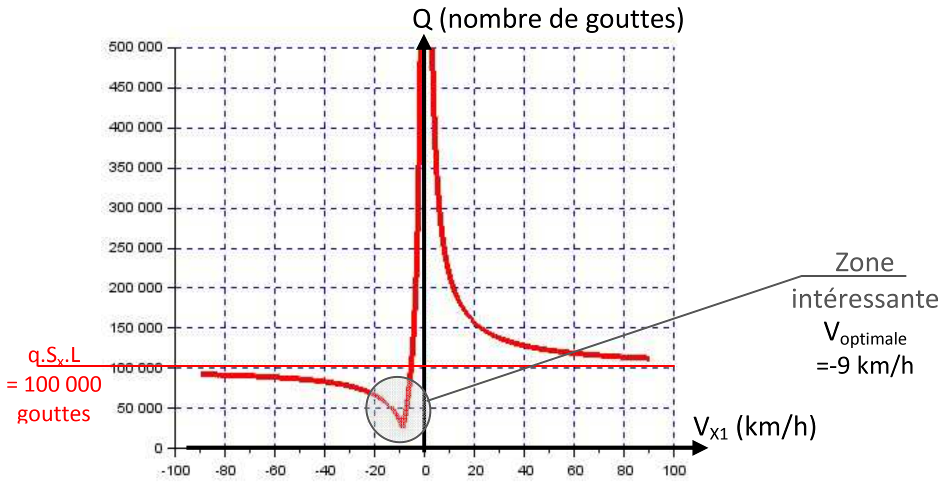

Figure 1.5 : Courbe Q en fonction de V_{X1}

Lorsque la vitesse V_{x1} de la personne devient négative, la quantité de pluie reçue diminue et passe même par un minimum. On remarquera que ce minimum est obtenu précisément pour l'opposé de la vitesse horizontale de la pluie V_{x2}.

Ce résultat peut paraître surprenant, mais est tout à fait normal puisqu'il correspond à une personne qui court (9 km/h quand même …) avec la pluie dans le dos (d'où la valeur négative), mais en compensant exactement la vitesse horizontale de la pluie. Cette personne ne serait alors mouillée que par la chute purement verticale sur sa surface supérieure, ce qui est incontournable. Dans ce cas particulier, qui révèle surtout de la chance de subir une pluie de dos, le fait d'adopter cette vitesse particulière permet de réduire énormément la quantité de pluie reçue par rapport à un déplacement réalisé avec une vitesse quelconque.

Nota Bene : pour les valeurs négatives de V_{x1}, certains membres de l'expression de Q deviennent négatifs, ce qui correspond à des quantités de pluie reçues dans le dos plutôt que *de face. La courbe de la figure 1.5 représente donc en réalité la fonction* $= \left|q.S_x.L.\frac{V_{x1}+V_{x2}}{V_{x1}}\right| + \left|q.S_z.L.\frac{V_z}{V_{x1}}\right|$*, de manière à ne pas tenir compte de ce détail.*

Conclusion

Il est apparu dans les développements précédents qu'il est tout à fait possible de modéliser un phénomène comme la pluie et comme le fait d'être mouillé. Le choix d'un modèle de comportement a permis successivement de faire des calculs d'abord simples, de dégager des comportements compréhensibles et de se convaincre de l'impact de certains paramètres sur la quantité de pluie reçue par un marcheur malchanceux.

Le fait de s'atteler à un cas plus complexe a permis de s'approcher d'une situation plus réaliste et, par chance, de déceler l'existence d'une configuration optimale. C'est essentiellement le calcul et la représentation graphique qui permettent de se convaincre du comportement de la courbe et donc, ensuite, de relier ces résultats à des faits plus intuitifs.

Il resterait encore quelques points à aborder, comme le cas d'une pluie oblique également dans la troisième dimension de l'espace où évolue notre marcheur. Des résultats comparables seraient alors obtenus et permettraient de généraliser totalement la calcul, mais sans apporter d'information radicalement plus intéressante ici.

Pour finir, le lecteur avide d'application pratique pourrait se demander quel est l'intérêt d'une telle étude, en dehors du petit défi de physique amusante. Ce sera à lui d'imaginer tout ce qui pourrait se rapprocher de ce problème, et donc d'en utiliser les démarches, les conclusions, ou certaines intuitions.