2+2=5 ?

« Savez-vous seulement quelle différence il y a entre un psychotique et un névrosé ?
Un psychotique, c'est quelqu'un qui croit dur comme fer que 2 et 2 font 5, et qui en est pleinement satisfait.
Un névrosé, c'est quelqu'un qui sait pertinemment que 2 et 2 font 4, et ça le rend malade ! »

Pierre Desproges

Il est possible de montrer sans détour que 2+2=5… Bien sûr cela vous semble faux voire malsain, mais considérez pour cela, et sans a priori, le contexte suivant :

On s'intéresse à un carré de côté 1, dans lequel la diagonale AB présente donc une longueur égale à $\sqrt{2}$ (d'après le théorème de Pythagore par exemple). Entre les points A et B il est alors possible de dessiner un trajet en escalier comme celui représenté en bleu sur le dessin de la *figure 2.1 a)*. Ce dernier est composé de 4 segments de longueur $1/2$, et totalise donc une longueur de : $4 \times \frac{1}{2} = 2$.

L'escalier dessiné en vert représenté sur la *figure b)* totalise 8 segments de longueur $1/4$, soit donc une longueur totale encore égale à $8 \times \frac{1}{4} = 2$…

En continuant à diviser chaque segment en deux, et en « passant à la limite », la longueur du segment [AB] peut alors être approchée par la longueur de l'escalier représenté sur la *figure c)*. Bien que ses marches soient infiniment étroites, sa longueur sera toujours 2 !

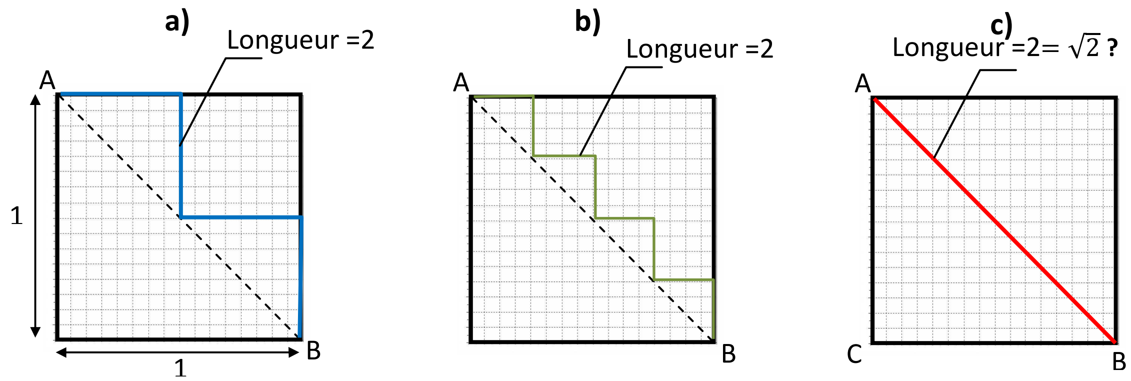

Figure 2.1 : L'escalier infini où $2 = \sqrt{2}$

L'égalité qui saute aux yeux est donc : « $2 = \sqrt{2}$ », autrement dit en mettant les deux termes au carré : « $4 = 2$ », et en divisant par 2 les deux termes précédents : « $2 = 1$ ».

La somme des deux dernières égalités amène : « $2 + 2 = 4 + 1 = 5$ », cqfd…

La question posée dans ce petit problème est évidemment : pourrez vous montrer que cette démonstration est fausse ? Mais une fois que c'est fait, profitez-en pour montrer que si le calcul de la longueur de [AB] basé sur l'escalier infini est incorrect, par contre le calcul de l'aire du triangle ABC par la même méthode serait juste…

Tout d'abord, définissons correctement les différentes étapes pour poser le problème :

- Tout d'abord, essayez de bien redémontrer le fait que la longueur totale des escaliers est égale à 2 quelque soit le nombre de marches qui composent la diagonale.
- Ensuite, essayez de distinguer une grandeur qui permette de vérifier « à quel point » la valeur de cette longueur « s'approche » (ou pas) de la longueur réelle de la diagonale qui vaut $\sqrt{2}$.
- Vérifiez alors que cette grandeur ne tend pas vers 0 avec l'augmentation du nombre de marches, et qu'ainsi il n'y a aucune raison pour que ces deux longueurs soient assimilées.
- Pour finir, développez le même type de développement et d'argumentation pour la détermination de l'aire du triangle ABC.

Solutions :

La diagonale et « l'escalier »

Reprenons rapidement le calcul de la longueur de la diagonale obtenue par le passage à la limite de « l'escalier » allant de A ves B :

La *figure 2.2* reprend les exemples de la *figure 2.1*, elle est reprise ici pour plus de clarté.

L'escalier de gauche propose de séparer le trajet direct de A vers B en : ½ vers la droite , ½ vers le bas, ½ vers la droite et encore ½ vers le bas. La longueur totale sera alors notée :

$$L_1 = 2 \times \left(2 \times \frac{1}{2}\right) = 2$$

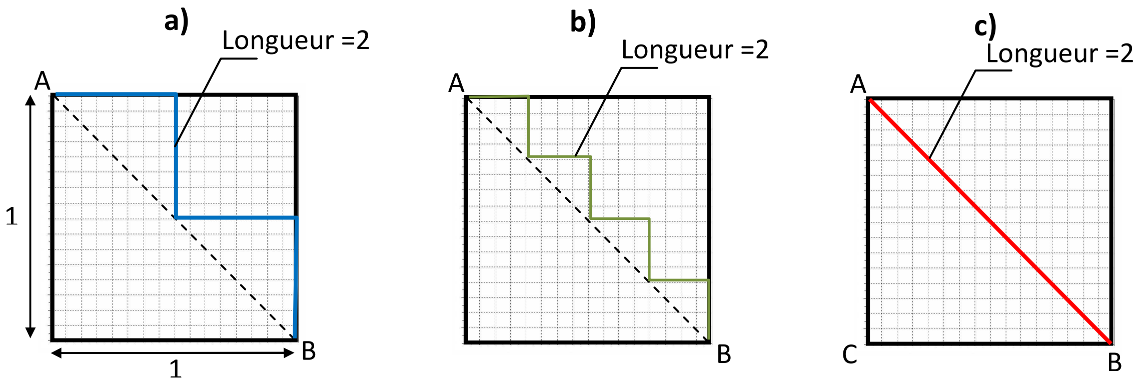

Figure 2.2 : L'escalier infini où $2 = \sqrt{2}$

Pour l'escalier de la *figure b)* on peut compter 4 déplacements horizontaux de longueur ¼ et 4 déplacements verticaux de longueur ¼ également. La longueur totale s'écrit alors :

$$L_2 = 2 \times \left(4 \times \frac{1}{4}\right) = 2$$

En imaginant qu'on itère le découpage précédent, il faudrait recenser deux fois 8 segments de longueur 1/8 … On obtiendrait donc :

$$L_3 = 2 \times \left(8 \times \frac{1}{8}\right) = 2$$

Ainsi, la n-ième étape de ce processus de découpage présenterait la longueur suivante :

$$L_n = 2 \times 2^n \times \frac{1}{2^n} = 2$$

On constate alors que le fameux « passage à la limite » est un peu particulier puisqu'il s'applique à une longueur qui est constante : $\lim_{n\to\infty}\left(2 \times 2^n \times \frac{1}{2^n}\right) = 2$.

A ce stade, il est possible de dire que la longueur de cette diagonale, qui vaut en réalité $\sqrt{2}$ est aussi égale à 2 et là tout devient possible. Il devient alors accessible de prouver que $2 + 2 = 5$ et de la même manière que $1 = 0$ ou toute autre sottise…

Evidemment, cela est faux et l'intérêt du problème est d'identifier où se situe la supercherie.

Analyse de l'erreur

En réalité, lorsqu'on découpe le trajet de A vers B en n étapes, chacune de ces étapes présente une certaine « erreur » par rapport à l'estimation de la longueur de la diagonale représentée sur la *figure 2.3*.

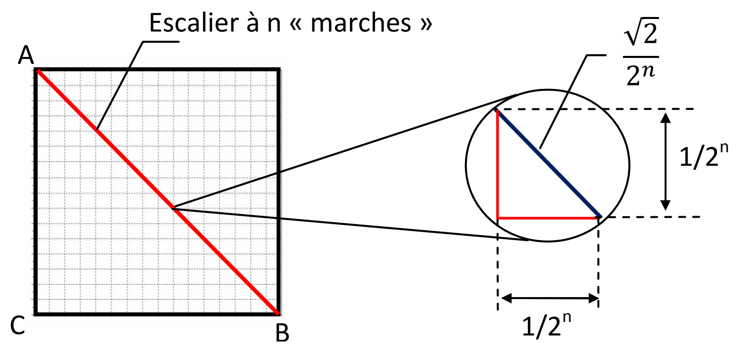

Figure 2.3 : L'escalier à n marches et l'erreur associée

L'erreur faite à chaque pas de calcul s'écrit : $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n} - 2 \times \frac{1}{2^n}$

Mais l'erreur totale s'écrit alors : $\varepsilon_{totale} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2^n} - 2 \times \frac{1}{2^n}\right) \times 2^n = \sqrt{2} - 2 = cte$

Autrement dit, dans ce principe de découpage de la distance AB la diminution de l'erreur de chaque marche est compensée exactement par le nombre de marches et la multiplication qu'il implique sur l'erreur résultante. **Comme l'erreur ne diminue pas avec la finesse du découpage** (l'augmentation de n) le calcul donne un **résultat inconditionnellement faux**, et bien sûr tout ce qui en découle sera faux également.

La morale dans ce cas de figure est la suivante : il faut toujours être très méfiant avec les « passages à la limite » et les « passages à l'infini » des suites, des séries, et de façon générale de tout calcul basique itéré à l'infini et sur lequel on opère des sommes ou des différences. On peut faire dire beaucoup de choses à l'infini, mais un bon nombre sont idiotes.

Estimation de l'aire du triangle ABC

Comme il est demandé dans le problème, il est maintenant temps de montrer que le calcul de l'aire du triangle ABC par la méthode de découpage en escalier fonctionnerait et donnerait le bon résultat, dans le cas d'un nombre suffisamment grand de marches.

Reprenons alors le principe du découpage mais en identifiant l'aire en question, représentée pour plusieurs pas sur la *figure 2.4*.

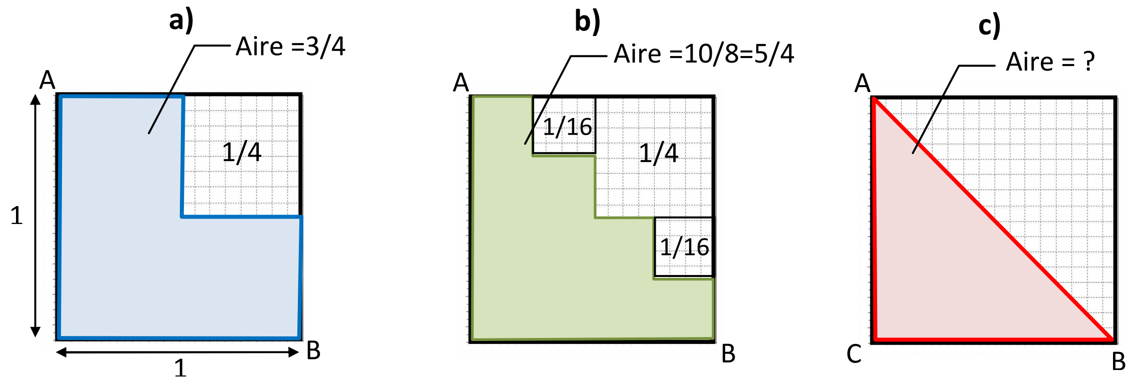

Figure 2.4 : L'escalier pour le calcul de l'aire

Sur la *figure 2.4 a)*, on réalise un « découpage » et l'aire estimée (en bleu) s'écrit :

$$A_1 = 1 - \frac{1}{4}$$

Sur la *figure 2.4 b)*, on « ôte » à l'aire précédente l'aire des deux petits carrés entourés en trait fin d'aire 1/16. L'aire estimée, en vert, s'écrit alors :

$$A_2 = 1 - \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

De la même manière l'étape d'après consisterait à ôter à l'aire A_2 les aires de 4 carrés d'aires $\frac{1}{16\times 4}$, ainsi l'aire estimée (non représentée) s'écrirait :

$$A_3 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$$

Il apparaît alors qu'en continuant ce principe de découpage, l'aire estimée au n-ième pas s'écrirait :

$$A_n = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \cdots - (n+1) \times \frac{1}{(n+1)} \times \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \cdots - \frac{1}{2^{n+1}}$$

L'erreur commise dans l'estimation de l'aire au n-ième pas s'écriait alors :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \cdots - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Ou encore :

$$\varepsilon_n = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Et justement, la somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$ est la somme d'une suite (une « série » donc) bien connue, qui est le cœur du « paradoxe de Zénon » (je vous laisse chercher de quoi il s'agit).

En appelant $S_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$ on peut remarquer le fait qu'il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison ½, ou encore que :

$$2.S_{n+1}=1+S_{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

Ainsi : $S_{n+1}=1-\frac{1}{2^{n+1}}\rightarrow 1$ quand $n\rightarrow+\infty$

Comme cette somme tend vers 1, $\varepsilon_n=-1+S_{n+1}\rightarrow 0$ quand $n\rightarrow+\infty$.

L'erreur tendant vers 0 quand n augmente, **l'estimation de l'aire donnera un résultat convergent vers la bonne valeur**.

Conclusion

Ce problème a soulevé quelque chose de singulier : avec le passage à l'infini certains calculs convergent et permettent d'estimer de façon précise (voire très précise) certaines grandeurs, ou au contraire de tendre vers des valeurs « fausses » ou carrément de « diverger ».

Les constructions fractales en particulier, qui sont obtenues par itération, font parfois apparaître des longueurs infinies mais des aires finies (c'est le cas du « flocon de Koch »), ou des aires infinies et des volumes finis (c'est presque le cas des alvéoles pulmonaires et de leur irrigation sanguine) … et il faut constamment se méfier des conclusions hâtives reposant sur des passages à la limite.