La probabilité de la Grande Ourse

«[..] J'amenais mes belles de nuit, faire un tour sur la grande ourse.»

Auprès de mon arbre - Georges Brassens

Qui ne connait pas la constellation de la Grande Ourse (Ursa Major) ? Plus précisément qui ne connait pas la fameuse « grande casserole », ou encore le « grand chariot », qui est certainement le groupement d'étoiles le plus communément identifié, le seul peut être qui soit nommé et reconnu par une majorité des gens (de l'hémisphère Nord) n'ayant aucune connaissance particulière en astronomie ?

Apparemment cette célébrité ne date pas d'hier puisque le nom Latin du groupement des sept étoiles de la « casserole » était « la constellation des sept bœufs », soit donc « *septemtriones* », ce qui a donné l'adjectif « septentrional » qui désigne simplement le Nord. Pourquoi le Nord ? Parce que le fait de reconnaître la Grande Ourse dans le ciel nocturne est le meilleur moyen pour retrouver l'étoile polaire (Polaris), celle-ci indiquant alors la direction du Nord…

NB : Pour cela, la technique est simple : identifiez le segment formé par le bord verseur de la casserole (Dubhe – Merak) et reportez-le 5 fois dans son alignement. Vous arrivez à proximité d'une étoile bien brillante, sans voisine à l'œil nu : l'étoile polaire (voir figure 6.1).

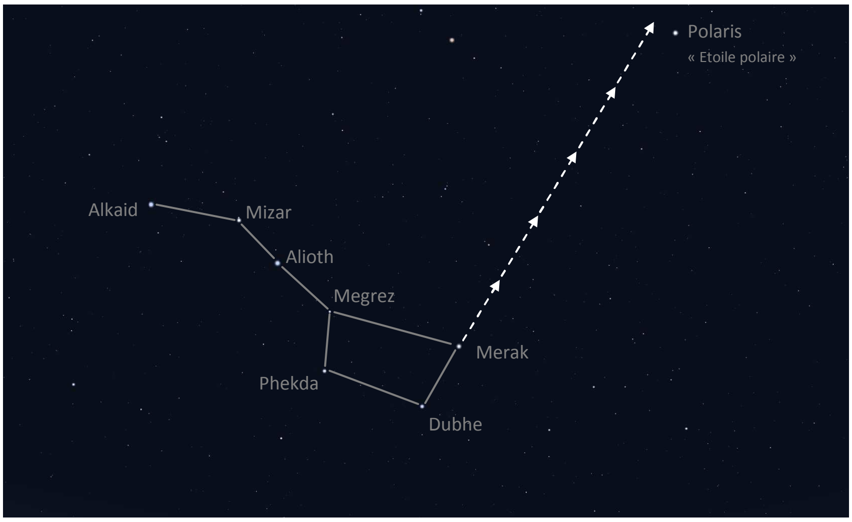

Figure 6.1 :   La Grande Ourse (Ursa Major) et Polaris

Cette partie de la constellation de la Grande Ourse est tellement reconnaissable qu'on peut se demander une chose : Sa forme est-elle « fortement probable » dans un ensemble désordonné, une répartition aléatoire d'étoiles vues de la Terre ?

La question qui vous est alors posée est la suivante :

« Saurez-vous calculer la probabilité d'apparition de la forme et de la taille de la Grande Ourse sur la voûte céleste ?»

Tout d’abord, formulons correctement le problème :

- En priorité faites l’hypothèse d’une « voûte céleste » hémisphérique sur laquelle les étoiles sont réparties au hasard, sans vous occuper de leur taille ni de leur luminosité. Une étoile sera caractérisée par le fait qu’une tâche lumineuse suffisamment grande est perceptible sur la voûte céleste. La seule chose qui est demandée est la probabilité d’apparition de « la forme » de la Grande Ourse sur cette voûte.
- Renseignez vous sur le « pouvoir séparateur » de l’œil humain, autrement dit à la capacité de l’œil nu à percevoir une certaine « taille » d’objets célestes. Essayez de bien comprendre les unités et les natures des grandeurs évoquées.
- Vous pourrez alors en déduire quelle est la probabilité qu’une seule étoile occupe un emplacement précis sur la voûte dans une distribution au hasard. Les étoiles seront alors considérées comme des pixels sur l’écran de la voûte céleste.
- Calculez alors quelle est la probabilité que plusieurs étoiles placées au hasard occupent plusieurs emplacements bien définis.
- Précisez alors l’expression de la probabilité que les 7 étoiles principales de la Grande Ourse apparaissent visiblement et avec la bonne taille sur le ciel nocturne.
- Vous pourrez ainsi vous amuser à calculer si, avec le nombre total d’étoiles visibles à l’œil nu depuis la Terre, la forme de la Grande Ourse était fortement probable ou non, si elle doit apparaître depuis d’autres systèmes planétaires, etc…

Solutions :

Le pouvoir séparateur de l'oeil

Il est assez épineux de définir et d'estimer la « taille » minimale d'une étoile qu'il est possible de voir à l'œil nu dans le ciel nocturne. Même en faisant l'hypothèse d'une « sphère céleste » (plutôt une demi-sphère pour un observateur) vue de la Terre, le rayon de cette sphère est indéfini et intangible et donc la taille des objets qui s'y trouvent l'est également. En d'autres termes, il est maladroit de parler de la taille d'un objet éloigné dont on ne connait pas l'éloignement par rapport à l'observateur.

Dans ce cadre, il est d'usage de se servir de l'angle sous lequel on voit l'objet, ou d'un rapport de distances qui lui est corrélé. Dans le cas de l'observation à l'œil nu, on peut alors se demander sous quel angle minimal l'humain n'arrive pas à distinguer deux objets séparés : on parle alors de « pouvoir séparateur » ou « pouvoir de résolution ». La *figure 6.2* représente un observateur placé au centre de la sphère céleste et « l'angle θ » par lequel il perçoit deux étoiles proches (sur la voûte, ce qui ne veut pas dire qu'elles sont proches dans l'espace).

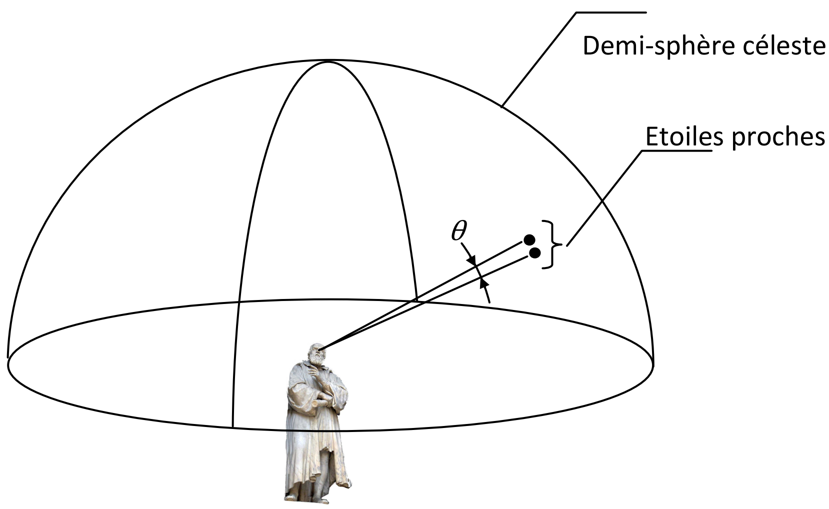

Figure 6.2 : Observateur, sphère céleste et pouvoir de séparation

Après une recherche rapide sur internet ou dans un quelconque ouvrage d'astronomie, on apprend que si cet angle est inférieur à « une minute d'arc », il devient impossible de distinguer les deux objets à l'œil nu. Le pouvoir de séparation (PS) est ainsi défini comme la valeur minimale de cet angle en dessous de laquelle la perception est altérée :

$$PS = \theta \cong 1 \min d'arc = \frac{1}{60}\ degré = 0{,}017° = 0{,}0002909\ rad$$

Probabilité de placement d'une étoile « placée au hasard » sur la sphère céleste

A partir de la connaissance du pouvoir séparateur de l'œil il est possible d'estimer la probabilité qu'une étoile placée au hasard occupe une place bien déterminée sur la sphère céleste. En effet, une seule étoile visible n'est pas vraiment un objet « vu comme ponctuel » à cause des processus de diffraction et des figures légèrement floutées qui en découlent. Le pouvoir de séparation est d'ailleurs dû en partie à ca. Ainsi, une étoile sera « vue » par l'humain au minimum comme une petite tache dont la surface se calcule facilement à partir de l'angle θ et du rayon de la sphère céleste R.

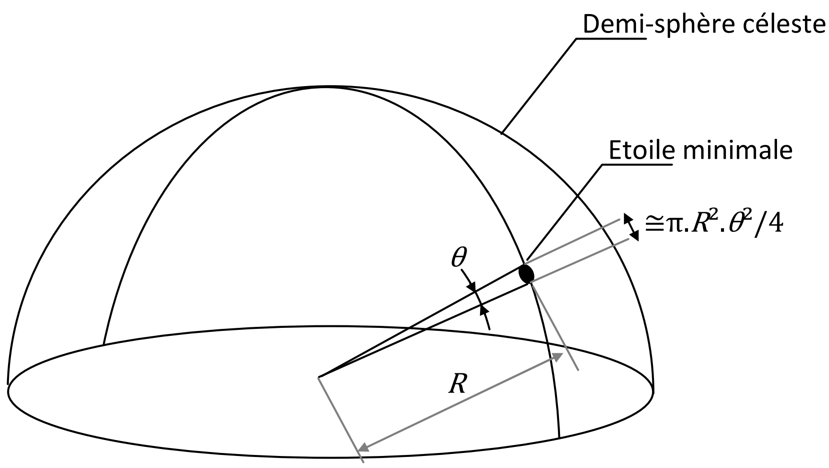

Figure 6.3 : Tâche stellaire

L'angle étant très petit, on confond le diamètre de la tâche avec la longueur de l'arc décrit : $D = R.\theta$.

La surface du petit disque que constitue l'étoile au rayon R est ainsi : $\pi.\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi.R^2.\theta^2/4$.

Parallèlement, la surface de la « sphère céleste » serait la surface d'une sphère de rayon *R*, soir donc : $4.\pi.R^2$.

La probabilité qu'une étoile soit placée sur une position bien précise de la sphère céleste semble ainsi se réduire au rapport de la petite surface qu'elle représente par celle de la sphère entière :

$$p_* = \frac{\pi.R^2.\theta^2/4}{4.\pi.R^2} = \frac{\theta^2}{16} = 5{,}288.10^{-9} = \frac{1}{189089645}$$

Soit donc une chance sur 189 millions …

Il est ainsi possible de considérer que la sphère céleste est une sorte d'écran sphérique présentant $N_p = 189089645$ « pixels ». Cela permet par la suite de calculer plus facilement les probabilités.

Notion d'angle solide

En dehors des premiers résultats obtenus ci-dessus, les calculs abordés sont intéressants car ils font apparaître que le rayon *R* de la sphère céleste se simplifie dans les expressions des probabilités. Plus précisément c'est le carré de ce rayon qui disparaît dans les calculs. Il semble donc possible de ramener les surfaces occupées par les objets à un rayon théorique *R* égal à 1 : la grandeur correspondante s'appelle alors « l'angle solide ».

Pour bien comprendre ce que cela représente, il faut noter qu'un angle commun peut être interprété, dans le plan, comme le rapport de l'arc de cercle décrit et du rayon : $\alpha = \frac{R.\alpha}{R}$

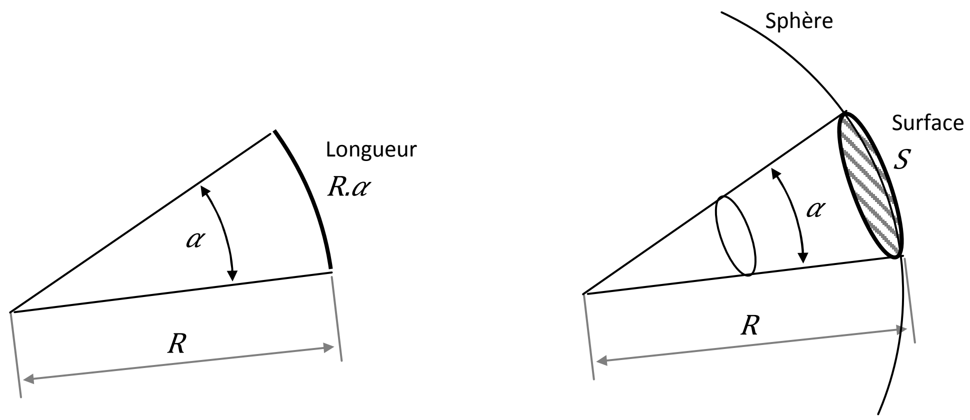

Figure 6.4 : Angle simple et angle solide

Lorsque on s'intéresse à un objet dans l'espace, la notion d'angle est insuffisante et une sorte « d'angle en trois dimensions » est disponible par analogie directe avec ce qui se passe dans le plan : La notion « d'angle solide » représente ainsi le rapport de la surface S (de la calotte sphérique que délimite le cône d'angle au sommet α sur la sphère) et du carré du rayon : $\Omega = \frac{S}{R^2}$.

Lorsque l'objet est la sphère complète, c'est-à-dire que l'angle solide représente le fait qu'on embrasse toutes les directions possibles, la surface s'écrit $S = 4\pi.R^2$, et la mesure de l'angle solide est donc : $\Omega_{\text{sphère}} = 4\pi$. Même si le nombre obtenu est sans dimension, une unité d'angle solide existe et est appelée le « stéradian » (sr).

Dans notre calcul précédent, la probabilité de placement d'une seule étoile sur toute la sphère céleste revient donc au simple rapport de leurs angles solides.

Probabilité d'occupation d'une position précise lors du placement au hasard de N_e étoiles

Une probabilité particulière aura une importance capitale dans la suite du raisonnement : quelle est la probabilité pour qu'un emplacement particulier sur la sphère soit occupé si on y dispose au hasard N_e étoiles ?

Pour trouver cette probabilité, il est nécessaire de passer par l'expression de la proposition contraire, car celle-ci fait intervenir des « ET logiques », autrement dit des multiplications de probabilités : Quelle est la probabilité qu'aucune étoile parmi les N_e réparties au hasard n'occupe les N emplacements bien définis ?

Celle-ci s'écrit : $\left(\frac{N_p-1}{N_p}\right)^{N_e}$

Ainsi la probabilité qu'un emplacement particulier sur la sphère soit occupé est la valeur complémentaire : $1-\left(\frac{N_p-1}{N_p}\right)^{N_e}$

<u>Explication de la formule</u> : la *figure 6.5* représente un « écran » de $N_p = 16$ pixels, supposé plan pour que ce soit plus facile, sur lequel on « jette » mentalement $N_e = 3$ étoiles qui ne doivent pas occuper la case noire. Il y a $N_p - 1 = 15$ cases libres pour 16 cases en tout.

Aucune des 3 étoiles n'est sur la case noire

Probabilité : 0,823

Formule : $\left(\frac{N_p-1}{N_p}\right)^{N_e}$

Au moins une étoile est sur la case noire

Probabilité : 1-0,823=0,176

Formule : $1-\left(\frac{N_p-1}{N_p}\right)^{N_e}$

Figure 6.5 : Lancer de 3 étoiles sur un ciel de 16 pixel et probabilités

La probabilité que chaque lancer évite la case noire est : $\frac{N_p-1}{N_p} = \frac{15}{16}$.

Si on renouvelle $N_e = 3$ fois le lancer, la probabilité pour que le premier jet ET le second jet ET le troisième n'occupent pas la case noire est donc : $\left(\frac{N_p-1}{N_p}\right)^3 = \left(\frac{15}{16}\right)^3 = 0{,}823$.

Du coup, la probabilité pour que la case noire soit occupée au moins une fois est la probabilité complémentaire : $1-\left(\frac{N_p-1}{N_p}\right)^3 = 0{,}176$.

Probabilité du positionnement de N étoiles lors du placement au hasard de N_e étoiles

Si cette fois les N_e étoiles placées au hasard sur la voûte doivent occuper N emplacements bien définis au lieu d'un seul, la probabilité pour que cela arrive est celle de l'occupation de la première étoile multipliée par celle de la deuxième étoile multipliée par celle de la troisième … etc. jusqu'à la N-ième.

La probabilité de placement de N étoiles parmi N_e réparties au hasard est donc :

$$\left(1-\left(\frac{N_p-1}{N_p}\right)^{N_e}\right)^N$$

Calcul de la probabilité d'apparition de la forme de la Grande Ourse

Une fois la probabilité p_* estimée, il suffit de s'interroger sur la probabilité totale conduisant à retrouver la forme de la Grande Ourse sur la distribution aléatoire de N étoiles.

- Première étoile : Dans les hypothèses, aucune localisation précise de la constellation n'est retenue. En imaginant un jet d'étoiles aléatoire sur la voûte céleste, la probabilité que la première étoile soit « bien placée » est donc de 100% de chances. On retiendra : $p_1 = 1$.
- Deuxième étoile : Dans les hypothèses de notre calcul, rien d'impose non plus que la constellation ait une direction particulière. Seule « sa forme » est importante. La seconde étoile fixée de la constellation doit donc juste faire avec la première un « certain angle » (par exemple l'angle entre Merak et Dubhe vaut 5° 22' 9.8''). La probabilité correspondant au fait qu'une étoile unique présente la bonne inclinaison est donc simplement égale au pouvoir de séparation (l'arc minimal que représente une étoile) divisé par π (l'angle correspondant à la demi-sphère) : $\frac{\theta}{\pi}$. Attention, dans notre problème, il faut s'assurer « qu'au moins une étoile parmi les $N_e - 1$ » jetées au hasard soit inclinée du bon angle. Cela se calcule facilement en déterminant la probabilité de l'inverse de cet évènement : La probabilité que toutes les $N_e - 1$ étoiles jetées au hasard évitent la bonne inclinaison est : $\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)^{N_e-1}$. Ainsi, la probabilité « qu'au moins une étoile parmi les $N_e - 1$ » soit bien positionnée s'écrit comme la probabilité complémentaire : $p_2 = 1-\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)^{N_e-1}$

- Etoiles suivantes : Il reste 5 étoiles à placer pour compléter la forme. Mais maintenant, les 5 positions correctes permettant de former le reste de la constellation sont uniques ! La probabilité est donc celle du positionnement de 5 étoiles parmi $N_e - 2$, ce qui est directement donné par la formule : $p_3 = \left(1-\left(\frac{N_p-1}{N_p}\right)^{N_e}\right)^5$

La probabilité finale correspondant à ce que les N étoiles jetées au hasard composent la forme de la Grande Ourse est donc :

$$p = p_1.p_2.p_3$$

$$p = 1 \times \left(1 - \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)^{N-1}\right) \times \left(1 - \left(\frac{N_p - 1}{N_p}\right)^{N_e}\right)^5$$

Application numérique : Sachant qu'environ $N = 8000$ étoiles sont censées être visibles à l'oeil nu depuis la Terre, le calcul donne : $p = 7{,}092.10^{-23}$. Autrement dit, une chance sur $1{,}4.10^{22}$ cas environ.

En retenant le fait qu'il doit exister de l'ordre de 100 milliards de planètes dans la galaxie (la voie lactée), en supposant qu'une sur $1{,}4.10^{22}$ environ permet d'observer la forme de la Grande Ourse dans son ciel, il faudrait de l'ordre de 100 milliards de galaxies pour totaliser environ une chance que cela se produise…

Réflexion sur la taille des étoiles

En réalité les étoiles qui composent la Grande Ourse présentent une luminosité importante, ce qui fait qu'elles restent visibles même dans de mauvaises conditions de transparence de l'air ou en présence de lumières parasites. Toutes les étoiles qui composent « le grand chariot » présentent une magnitude inférieure à 1, sauf Megrez qui est la moins forte avec 1,3. Les calculs précédents sont basés sur une répartition au hasard d'étoiles pour lesquelles la luminosité ne compte pas.

De façon à nuancer les résultats, il serait possible de ne s'intéresser qu'à des étoiles « visiblement plus lumineuses », ou encore constituant des « pixels plus gros ».

- En augmentant d'un facteur 3 par exemple la taille du pixel d'origine (on prend alors $\theta \cong 3 \min d'arc$) le calcul donne $p = 7{,}13.10^{-18}$.

La probabilité est ainsi 100.000 fois plus importante et il ne suffit plus que de l'ordre d'un million de galaxies pour statistiquement retrouver la forme et la taille de la constellation.

- Avec une valeur de $\theta \cong 10 \min d'arc$, on obtient une probabilité 10 milliards de fois plus importante, ce qui tend surtout à prouver que les résultats sont très dépendants des hypothèses de base, et donc certainement peu fiables…