

L'espérance du jeu de fléchettes

«Qui voyage sur le char de l'espérance a la pauvreté pour compagne.»

Dictionnaire des proverbes, Pierre-Marie Quitard 1968

En jouant un jour aux fléchettes avec mon fils, je me suis demandé à quoi était dû l'agencement très particulier des points qui apparaissent sur la cible. Si vous avez déjà joué à ce jeu vous savez que le centre représente 50 points, la petite couronne autour du centre 25 points, et qu'ensuite chaque secteur correspond au nombre écrit sur son extérieur, sauf que les couronnes médiane et extérieure correspondent respectivement au « compte triple » et au « compte double ». La *figure 8.1* représente une cible classique ainsi qu'un petit rappel sur les gains assurés par les différents secteurs ainsi que leurs tailles.



Figure 8.1 : La cible du jeu de fléchettes

On se rend compte rapidement qu'il est plus avantageux de viser le « compte triple » du secteur 20, ce qui rapporte 60 points en cas de succès, mais qui risque fort de ne vous rapporter qu'un point si vous tombez dans le 1 tout proche...Ainsi, l'agencement des points permet qu'un fort score (le 20 par exemple) soit toujours entouré par deux scores bien plus faibles (le 1 et le 5) ce qui évite que certains endroits représentent des points de visée trop favorables.

Un esprit scientifique reliera tout de suite ces considérations à la notion « d'espérance mathématique » du gain, autrement dit chercherait à savoir quels scores on obtiendrait en moyenne si on faisait un grand nombre de lancers, et essaierait de déterminer ces valeurs moyennes.



Les deux questions qui vous sont alors posées sont les suivantes :

« Saurez-vous calculer l'espérance mathématique d'un tir au hasard tombant à l'intérieur de la cible ? » et « saurez vous déterminer la zone dans laquelle VOUS auriez intérêt à viser pour maximiser l'espérance mathématique de votre tir ? »



Tout d'abord, définissons correctement les différentes étapes pour poser le problème :

- ❖ En priorité assurez-vous que vous avez bien compris comment s'établissent les scores dans les différents secteurs de la cible.
- ❖ Ensuite déterminez quelle est la probabilité de faire un score de 1, de 2, etc...
- ❖ Calculez alors le score moyen obtenu, autrement dit l'espérance mathématique d'un tir au hasard dans la cible.
- ❖ En ce qui concerne votre tir à VOUS, essayez d'abord de déterminer quelles sont les caractéristiques de VOTRE visée. Proposez une expérience conduisant à savoir dans quel « rayon moyen » vous visez.
- ❖ Connaissant cela, demandez vous comment automatiser le calcul de l'espérance mathématique sur ce rayon moyen tout en baladant le point de visée à plusieurs endroits de la cible... Vous devriez alors pouvoir trouver celui qui présente la plus grande efficacité.



Solutions :

La cible en détails

En réalité, la cible du jeu de fléchettes présente des caractéristiques dimensionnelles précises qu'il est possible de retrouver en quelques clics sur Internet. La *figure 8.2* représente ainsi plus précisément que la *figure 8.1* les dimensions utiles ainsi que les scores correspondants aux secteurs du 20, du 1 et du 5.

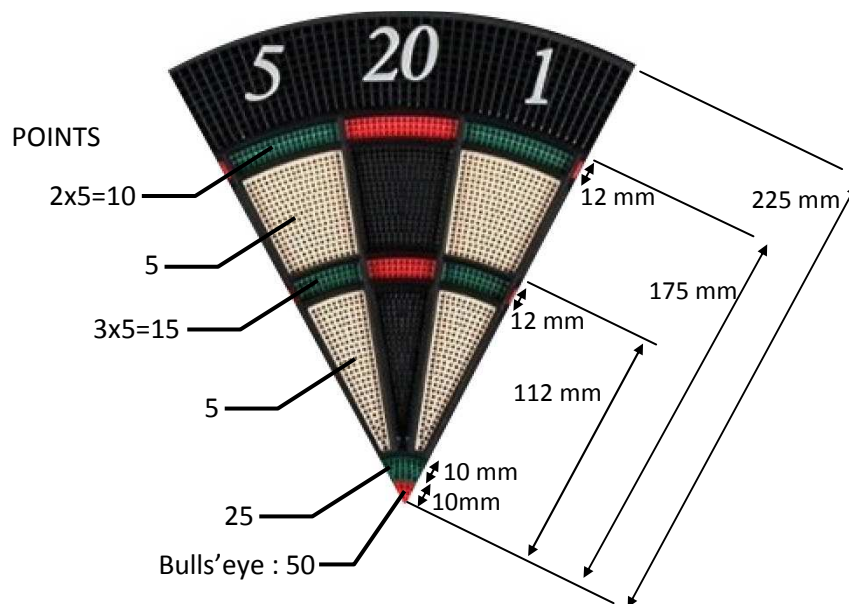


Figure 8.2 : La cible et ses dimensions

A partir des dimensions des différents secteurs, il est possible de calculer les surfaces qu'ils représentent, et ainsi d'en déduire les rapports de ces surfaces et de la surface totale de la cible. Ces valeurs correspondent alors aux probabilités de tir dans les différents secteurs et vont permettre de calculer les scores moyens obtenus. La figure 8.3 précise ainsi les aires et les rapports d'aires des divers secteurs de la cible.

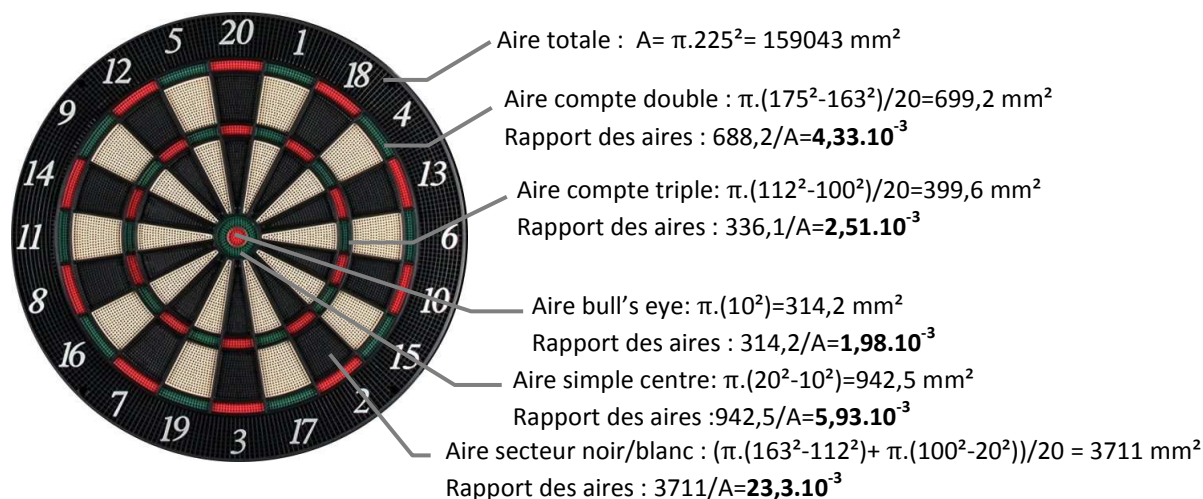


Figure 8.3 : Aires des secteurs et rapports à l'aire totale

L'espérance mathématique d'un tir au hasard dans la cible

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire correspond à la valeur moyenne que devrait présenter cette variable dans le cadre d'un grand nombre d'échantillons. De façon plus efficace, l'espérance correspond également à la moyenne des valeurs prises par la variable pondérée par leurs probabilités d'apparition.

Un exemple simple suffit pour comprendre : jetez un dé à 6 faces et considérez que votre « variable aléatoire » V est la valeur affichée par la face supérieure. Quelle est son espérance ?

C'est très simple, chaque face présente une probabilité d'apparition de $1/6$ et la moyenne pondérée des valeurs s'écrira donc : $E(V) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6$.

Le résultat du calcul donne : $E(V) = 3,5$. Vous pouvez alors retrouver ce résultat en faisant un grand nombre de lancers de dé et en calculant finalement la moyenne des valeurs obtenues.

A l'image de ce calcul, l'espérance d'un tir au hasard dans la cible sera égale à la somme des valeurs des gains de chaque secteur multipliés par les probabilités de tomber dedans... Ces probabilités sont tout simplement les rapports des surfaces des secteurs par la surface totale de la cible. Ainsi, on calculera l'espérance en écrivant :

$$E(50 \text{ points}) = 50 \times 1,98 \cdot 10^{-3}$$

$$E(25 \text{ points}) = 25 \times 5,93 \cdot 10^{-3}$$

$$E(1 \text{ point}) = 1 \times 23,3 \cdot 10^{-3}$$

$$E(1 \text{ point compte double}) = 2 \times 1 \times 4,33 \cdot 10^{-3}$$

$$E(1 \text{ point compte triple}) = 3 \times 1 \times 2,51 \cdot 10^{-3}$$

L'espérance totale s'écrira :

$$E = E(50points) + E(25points) + E(1point) + E(1compte double) \\ + E(1compte triple) + E(2points) + E(2compte double) \\ + E(2compte triple) + \dots$$

Dans cette formule on remarque que le « 1 » du 1 point peut être mise en facteur, de même pour le « 2 » du 2 points, etc. Ainsi, on obtiendra au final :

$$E = E(50points) + E(25points) \\ + (E(1point) + E(1compte double) + E(1compte triple)) \times (1 + 2 \\ + \dots 20)$$

La somme $1 + 2 + \dots 20$ est égale à $\frac{20 \times 21}{2} = 210$, il vient alors l'expression finale :

$$E = E(50points) + E(25points) \\ + (E(1point) + E(1compte double) + E(1compte triple)) \times 210$$

L'application numérique donne :

$$E = 8,54$$

En d'autres termes, en effectuant un tir complètement au hasard dans la cible, le tireur gagne en moyenne entre 8 et 9 points.

Optimiser son propre tir

Le calcul précédent correspond au fait que le tireur n'arrive qu'à une seule chose : tirer dans la cible, mais sans arriver à viser plus soigneusement un secteur particulier.

Dans la plupart des jeux associés aux fléchettes, il est nécessaire de gagner rapidement un maximum de point, pour ensuite se concentrer sur la réalisation de scores particuliers permettant de finir la partie. On peut ainsi se demander où viser préférentiellement pour engranger le maximum de points en début de partie. En réalité la réponse à ce questionnement est que ça dépend de chaque personne et de la capacité de visée du tireur.

En effet, imaginez que vous êtes un excellent joueur de fléchettes et que vous arrivez pratiquement toujours à viser dans une surface inférieure à celle du Bull's eye. Dans ce cas ce n'est pas peine de chercher : il suffit de viser le centre, ou encore le compte triple du 20, pour engranger un grand nombre de point à chaque manche.

Par contre, si votre visée est très peu précise, il n'est peut être pas optimal de viser le centre ou le 20...

Pour trancher la question, procédez à une expérience simple : Placez au mur une feuille de papier et dessinez une petite croix en son centre. Ensuite lancez un grand nombre de fléchettes en visant la croix... Vous n'aurez plus alors qu'à mesurer grossièrement le « rayon » moyen correspondant à vos lancers.

Ensuite, il est possible de réaliser un petit programme permettant de calculer l'espérance mathématique de vos lancers en fonction du point central que vous visez sur la cible. Pour cela, il est possible de réaliser une image de la cible ne comportant que des couleurs en nuances de bleu (B, par exemple) parmi les trois nuances du mode RGB. La *figure 8.4* représente une telle image où chaque secteur a été colorisé avec un code de couleur correspondant au score correspondant affecté aux nuances de bleu. Le secteur du 20 par exemple a été colorisé avec une couleur RGB : $R=0, G=0, B=20$ et il en est de même pour tous les autres secteurs.

En imaginant alors que vous visez en moyenne avec un certain rayon d'incertitude R (celui que vous avez mesuré avec l'expérience de la feuille au mur) et que vous visez un point particulier sur la cible, il suffit alors de moyenniser les couleurs des pixels de l'image compris dans le cercle représenté pour obtenir le score moyen. C'est simple, il suffisait d'y penser.

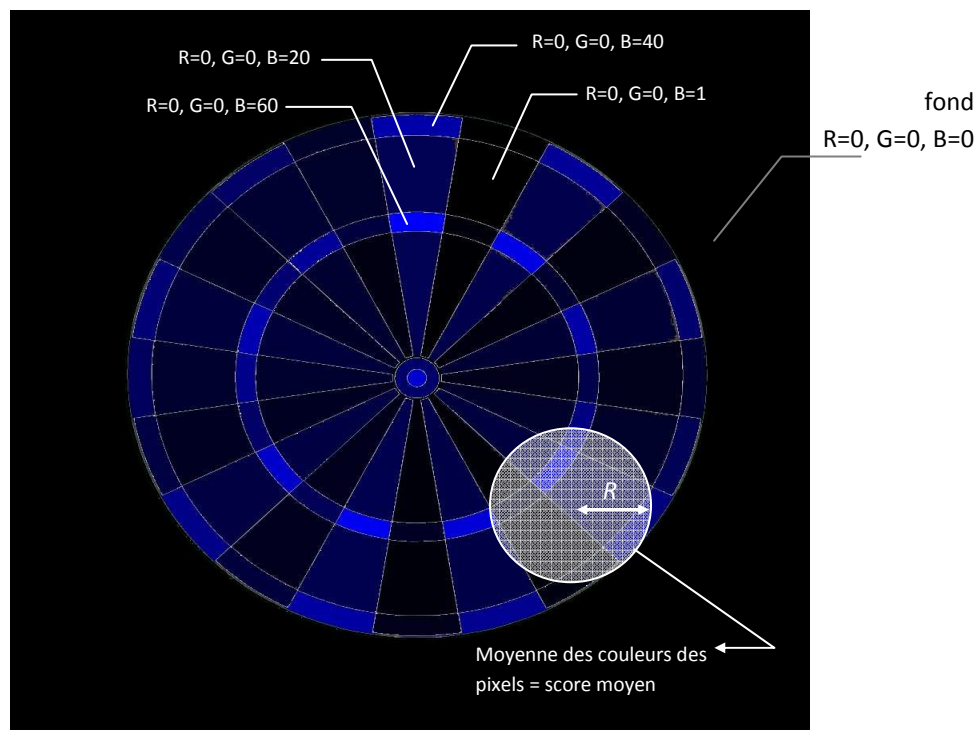


Figure 8.4 : La cible en image colorisée en fonction des points de chaque secteur

Une telle opération n'est pas compliquée à réaliser avec des logiciels mathématiques ou des logiciels de traitement d'image. J'ai testé cette idée en la programmant sous le logiciel Scilab (avec la toolbox de traitement d'images SIVP) et la *figure 8.5* représente ainsi les saisies d'écran et les résultats de calcul de l'espérance mathématique pour quatre lancers présentant un rayon d'incertitude de 20 cm sur la cible et visant successivement le centre, le compte triple du 14, celui du 19, et celui du 13.

Le calcul automatisé des moyennes des scores permet ainsi de « balader la visée » sur la cible et de déterminer rapidement quel secteur présente un score optimal.

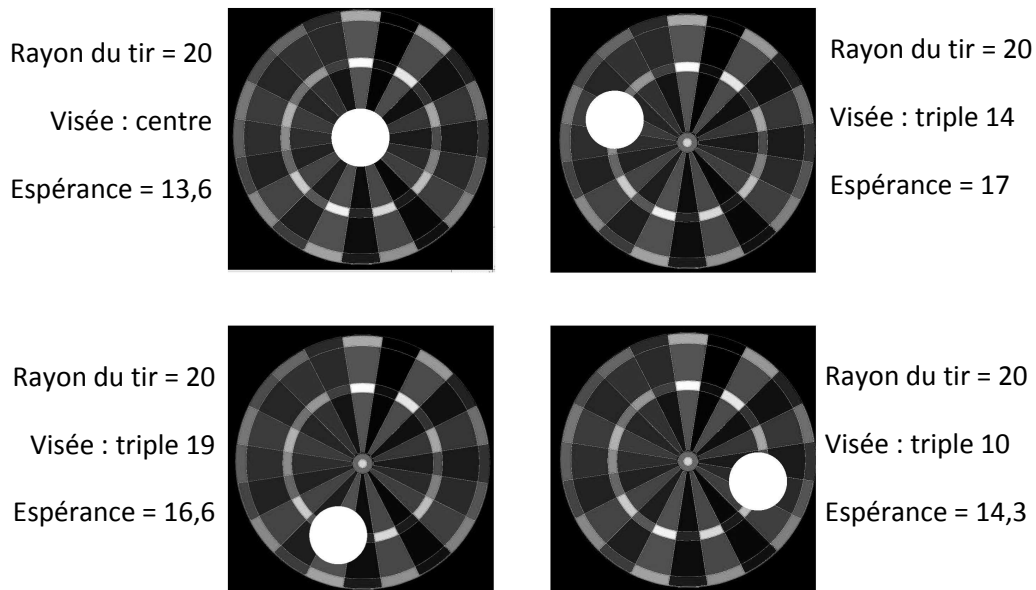


Figure 8.5 : Visées et espérance mathématiques

Les résultats sont d'ailleurs assez « parlants » : on constate en priorité que le fait de viser le centre présente l'espérance mathématique **la plus faible** des 4 tests réalisés sur la *figure 8.5*. En revanche, le fait de viser le compte triple du 14 ou du 19 présente un assez fort rendement, qui après quelques tâtonnements non représentés sur la figure constitue même le choix le plus rentable. En faisant varier le rayon d'incertitude, tout en restant au dessus d'un rayon de 10 (trop précis pour les novices comme moi) il est alors possible de balayer la cible et de noter quelles visées sont optimales. La *figure 8.6* présente ainsi trois cas différents permettant de conclure.

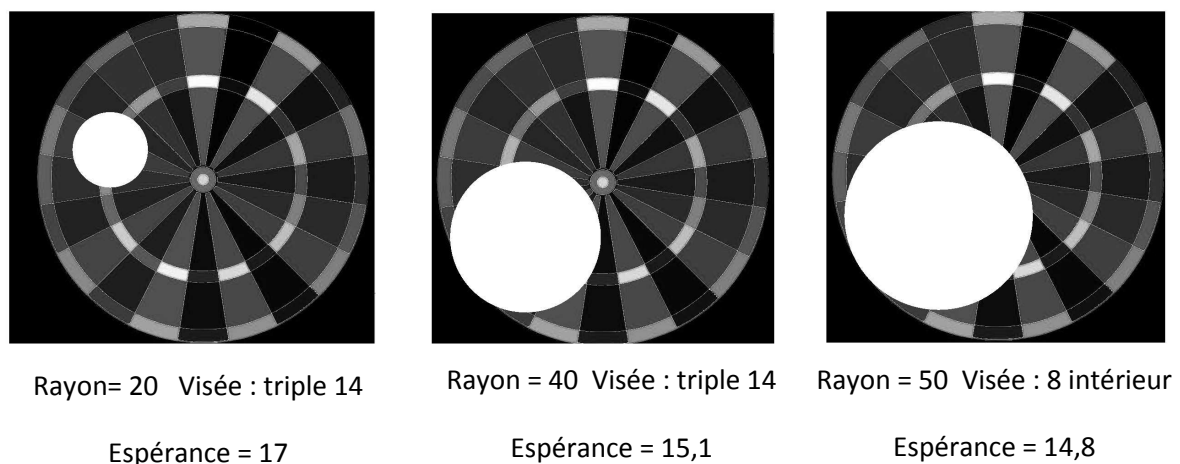


Figure 8.6 : Visées optimales

Il apparaît donc clairement sur cette figure résumant un assez grand nombre d'essais que **le secteur central gauche de la cible permet d'obtenir des scores moyens plus élevés que les autres secteurs...** Pensez-y la prochaine fois que vous jouez aux fléchettes !