Ca ne tourne pas rond !

«Toi qui pars dans les planètes pour voir si là haut il y a des pâquerettes et des coquelicots...»

Paroles de la chanson « Des je t'aime », Yves Montand

Dire que « la Terre tourne autour du soleil », comme les autres planètes du système solaire d'ailleurs, est aujourd'hui une évidence. Pourtant, l'Humanité est restée convaincue pendant la plus grande partie de son histoire que tous les astres tournaient autour de la Terre. Il faut avouer que l'idée est assez « logique » puisqu'il suffit de lever les yeux sur un beau ciel nocturne d'été pour se rendre compte que tout a l'air de tourner régulièrement et inexorablement autour de nous... Pourtant, en étant attentif aux mouvements des planètes, en particulier à ceux de Vénus et Mars bien lumineuses et bien mobiles, une anomalie de taille apparaît : au lieu de tourner régulièrement autour de la Terre, ces « astres voyageurs » s'amusent régulièrement à faire demi-tour, présentent des « rebroussements »...

Les astronomes Grecs avec Ptolémée (90-168), ont alors proposé une théorie complexe basée sur le fait que les planètes tournent bien autour de la Terre, « centre de l'Univers », mais en tournant également le long de petits cercles appelés « épicycles », ce qui effectivement autorise l'observation de rebroussements vus de la Terre.

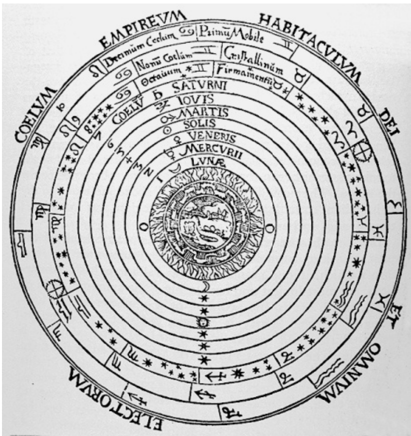

Figure 9.1 : La vision du monde de Ptolémée

Ce n'est qu'à partir de Copernic (1473-1543) que l'idée de l'héliocentrisme, autrement dit de la place centrale du soleil dans le système, a triomphé et a permis de simplifier considérablement la représentation des trajectoires des planètes...

En réalité le géocentrisme n'est pas vraiment une « erreur », mais plutôt un choix du centre du repère dont les conséquences sur la complexité apparente sont énormes.

La question qui vous est posée est la suivante :

« En partant de la représentation Héliocentrique des trajectoires des planètes, pouvez vous retrouver l'allure de ces trajectoires mais vues de la Terre, et justifier l'idée saugrenue des épicycles de Ptolémée ? »

Tout d'abord, définissons correctement les différentes étapes pour poser le problème :

- En premier lieu, renseignez vous sur les distances qui séparent les différentes planètes et le soleil. Profitez-en pour comprendre et utiliser l'unité de distance la plus pratique dans ce contexte : l'Unité Astronomique (UA).
- Ensuite renseignez vous sur les périodes de rotation autour du soleil des différentes planètes.
- En abordant la notion « d'excentricité » d'une ellipse, et en rappelant les propriétés de ces courbes, déterminez alors les équations permettant de tracer les trajectoires des planètes en utilisant pour cela un logiciel de calcul, ou même une calculatrice graphique.
- Intéressez-vous alors à effectuer un « changement de repère », permettant de tracer les courbes précédentes mais en positionnant la Terre, ou n'importe quelle autre planète au centre du repère. Vous devriez alors mieux comprendre pourquoi Ptolémée a eu l'idée des fameux épicycles…
- Pour finir, vous pouvez affiner vos tracés en tenant compte du fait que les trajectoires réelles des planètes sont comprises dans des plans légèrement inclinés les uns par rapport aux autres. La notion « d'inclinaison » devrait vous aider à corriger vos équations et à observer le fait que, vu de la Terre, le système solaire ne « tourne pas rond » !

Solutions :

Les données du système solaire

Aujourd'hui, se renseigner sur les distances, les périodes, etc. des astres du système solaire peut se faire en un clic. Par exemple le site web https://www.le-systeme-solaire.net/ propose un tableau récapitulatif très intéressant des astres principaux, représenté sur la *figure 8.2*.

	Demi grand axe (UA)	Excentricité	Inclinaison (°)	Période (années)
Mercure	0.38710	0.205631	7.0049	0.2408
Vénus	0.72333	0.006773	3.3947	0.6152
La Terre	1.00000	0.016710	0.00000	1.00000
Mars	1.52366	0.093412	1.8506	1.8808
Cérès planète naine	2.7665	0.078375	10.5834	4.601
Jupiter	5.20336	0.048393	1.3053	11.862
Saturne	9.53707	0.054151	2.4845	29.457
Uranus	19.1913	0.047168	0.7699	84.018
Neptune	30.0690	0.008586	1.7692	164.78
Pluton planète naine	39.4817	0.248808	17.1417	248.4
Haumea planète naine	43.2829	0.19089	28.2141	284.76
Makemake planète naine	45.64	0.15	29.00	308
éris planète naine	68.1461	0.432439	43.7408	562.55

Figure 9.2 : Données sur les planètes du système solaire

Les grandeurs apparaissant dans ce tableau sont relatives à des trajectoires qui en réalité forment des ellipses, et il apparaît donc nécessaire de faire à ce propos un minimum de rappels...

Rappels sur les ellipses

Les trajectoires des planètes et des satellites tournant autour d'un astre massif sont, on le sait depuis Kepler et Newton, des ellipses dont un des foyers coïncide avec la position de l'astre massif. La *figure 9.3* représente ainsi une ellipse quelconque dans un repère orthonormé dont le centre correspond au centre de l'ellipse (qui n'est pas un foyer).

Sur cette figure, le « demi-grand axe » représente en quelques sortes le grand rayon de l'ellipse, ou encore la distance *a* notée sur la figure.

La distance *b* s'appelle le « demi-petit axe » et l'équation de l'ellipse dans le repère (0, x, y) s'écrit alors de façon classique :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

NB : Cette équation se retient facilement à partir de celle d'un cercle en « testant » le cas particulier a=b=R…

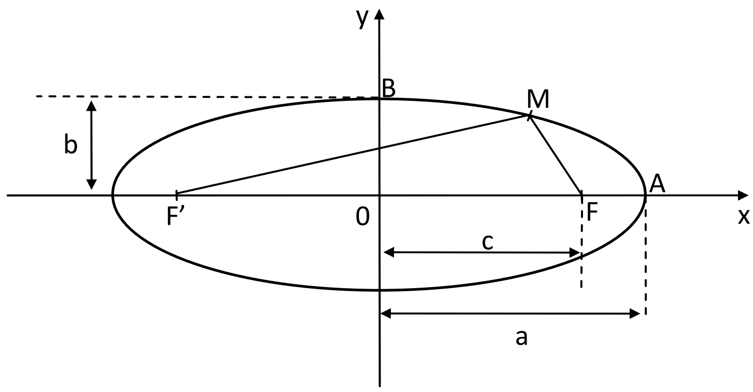

Figure 9.3 : L'ellipse et ses distances caractéristiques

Une autre écriture possible pour décrire les coordonnées des points de l'ellipse de centre O est l'écriture paramétrique (qui se déduit facilement de l'équation précédente) :

$$\begin{cases} x = a.\cos(t) \\ y = b.\sin(t) \end{cases} \quad \text{où } \; t \in [0,2\pi]$$

Parallèlement, une ellipse est le lieu des points dont la somme des distances par rapport à deux points appelés les « foyers », F et F', est constante. En d'autres termes quelque soit le point courant M sur l'ellipse : $MF + MF' = Cte$.

La distance entre le centre et les foyers est parallèlement notée *c*.

En imaginant le point courant situé au point A, on peut alors écrire :

$$\mathrm{AF} + \mathrm{AF'} = Cte = (\mathrm{a}-\mathrm{c}) + (\mathrm{c}+\mathrm{a}) = 2\mathrm{a}$$

L'équation caractéristique devient ainsi pour tout point M :

$$MF + MF' = 2a$$

En imaginant le point courant au point B, on remarque que le triangle OFB est alors rectangle et que ses côtés présentent les longueurs b et c, et son hypoténuse la longueur a. Le théorème de Pythagore permet ainsi d'écrire :

$$b^2 + c^2 = a^2$$

A partir de là, on définit « l'excentricité » de l'ellipse comme un rapport sans dimension permettant de quantifier « à quel point les foyers sont éloignés » :

$$e = \frac{c}{a}$$

NB : Une excentricité de 0 désigne un cercle, et au contraire une excentricité de 1 représente une courbe totalement écrasée réduite au segment [FF']

Ainsi, la connaissance du demi-grand axe a d'une trajectoire elliptique et de son excentricité *e* permet de calculer : $c = e.a$ et donc : $b = \sqrt{a^2 - c^2} = a.\sqrt{1 - e^2}$

Enfin, pour tracer une ellipse en positionnant son foyer F au centre du repère, il suffira d'ôter la valeur c à la coordonnée horizontale x. Les équations deviennent ainsi :

$$\begin{cases} x = a.\cos(t) - c \\ y = b.\sin(t) \end{cases} \quad \text{où } t \in [0{,}2\pi]$$

Les données du tableau de la *figure 9.2* vont alors nous permettre de tracer les trajectoires des différentes planètes dans le système solaire.

Tracés des trajectoires dans le système héliocentrique

Le tableau de la *figure 9.2* indique en première colonne les valeurs des demi-grands axes des trajectoires des planètes en utilisant une unité nommée U.A. pour « Unité Astronomique ». Cette dernière est tout simplement une moyenne de la distance Terre – Soleil, ou plus précisément du demi-grand de l'orbite Terrestre. Il est donc tout à fait naturel que sa valeur soit de 1 pour la Terre, qu'elle soit inférieure à 1 pour les planètes intérieures et supérieure à 1 pour les autres.

La seconde colonne indiquant l'excentricité de la trajectoire de chaque planète, et la dernière colonne la durée de la période de rotation en années, il devient très simple d'établir les équations paramétriques à partir d'un logiciel de calcul.

Par exemple sous le logiciel Scilab, et pour la planète mercure, il suffit d'écrire :

```
a=0.38710;
e=0.205631;
c=e*a;
b=a*sqrt(1-e^2);
w=1/0.2408;
xmercure=a*cos(w*t)-c;
ymercure=b*sin(w*t);
plot2d(xmercure,ymercure);
```

En faisant de même avec le soleil et les planètes Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne, on obtient les tracés représentés sur la *figure 9.4*.

Ensuite, pour obtenir les trajectoires vues de la Terre, il suffit d'opérer un changement de repère. Par exemple pour Mercure, il suffit d'écrire :

xmercure=xmercure-xterre

ymercure=ymercure-yterre

En faisant de même pour toutes les autres planètes, on trace alors très facilement les orbites vues en positionnant la Terre au centre du repère, comme le représente la *figure 9.5*.

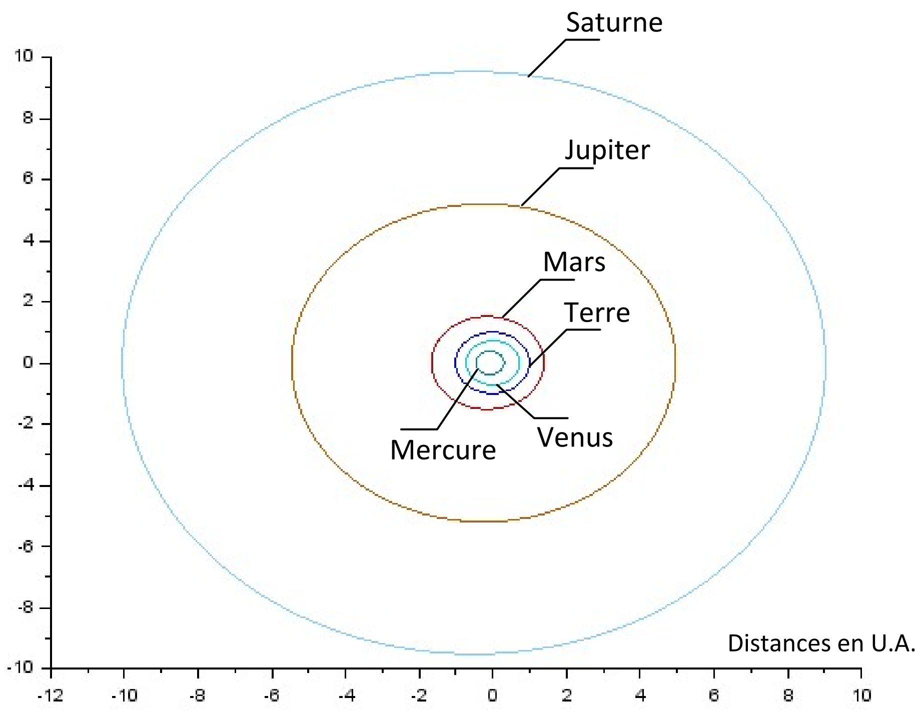

Figure 9.4 : Trajectoires en 2D des planètes – Repère Héliocentrique horizon 30 ans

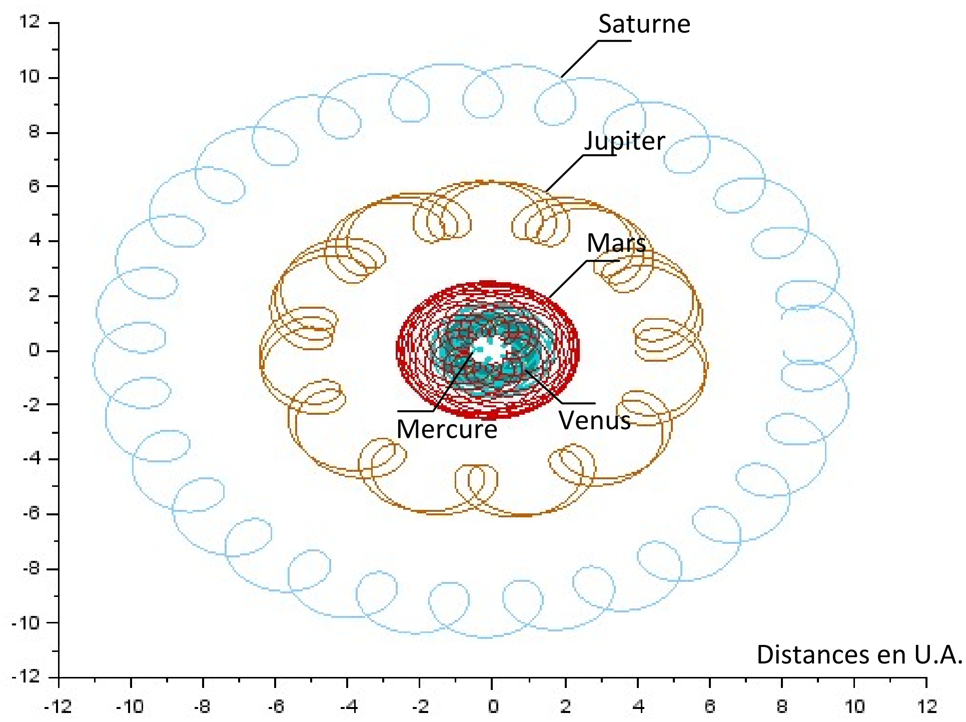

Figure 9.5 : Trajectoires en 2D des planètes – Repère Géocentrique - horizon 30 ans

Sur la *figure 9.5* les trajectoires de Mars, Vénus et Mercure sont difficiles à distinguer car elles réalisent un grand nombre de circonvolutions autour du centre (la Terre) de manière à ce que la trajectoire de Saturne (dont la période est presque 30 ans) soit complète. La *figure 9.6* présente alors un tracé des trajectoires comprises à l'intérieur de l'orbite de Mars, et ce sur seulement une durée de simulation représentant 3 ans. Le fond de l'image a été choisi noir de manière à bien distinguer la trajectoire du soleil représentée en jaune.

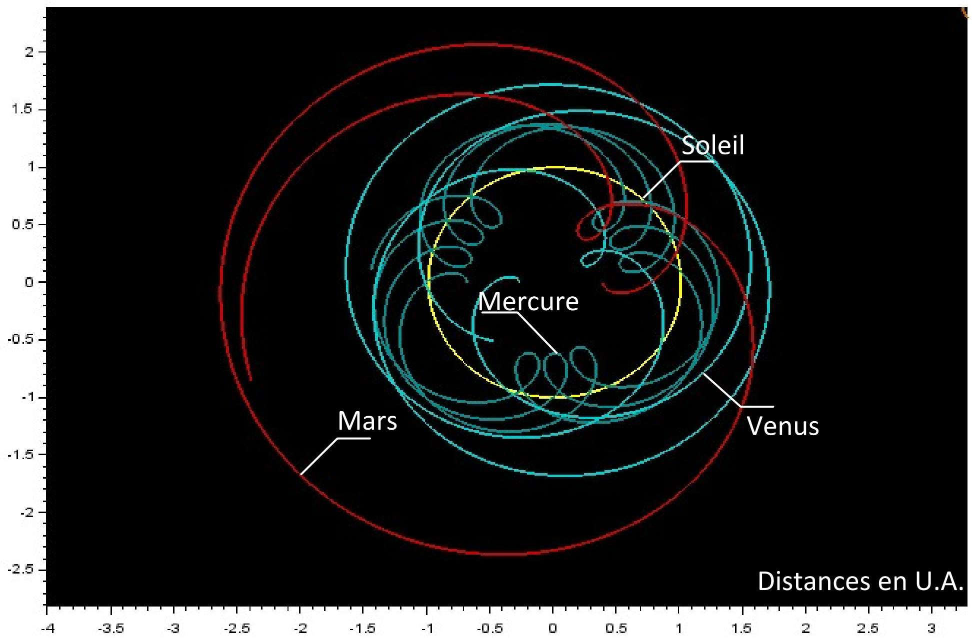

Figure 9.6 : Trajectoires en 2D des planètes telluriques – Repère Géocentrique - horizon 3 ans

Les deux dernières figures nous apportent des conclusions intéressantes :

- Même si les orbites vues dans le repère héliocentrique sont très proches de cercles, les trajectoires « vues de la Terre » présentent effectivement des épicycles ! Il est donc tout à fait normal, et même particulièrement perspicace de la part des astronomes Grecs d'avoir identifié ces mouvements épicycloïdaux et d'avoir établi des tables et des prévisions sur cette base là.

- Sur les trajectoires des astres proches de la Terre, on perçoit essentiellement Mercure et Vénus comme étant les plus proches (la plupart du temps), puis suivent le soleil et Mars. En regardant attentivement la *figure 9.1* on constate effectivement que cet agencement avait été retenu par Ptolémée… Mais évidemment à l'époque il devait être très difficile de justifier des points de rebroussement et des fortes variations des distances.

Inclinaison des orbites

En réalité les orbites des planètes du système solaire ne sont pas « coplanaires », c'est à dire comprises dans un même plan. Elles sont inclinées de façon variable et le tableau de la *figure 9.2* indique la valeur de « l'inclinaison » en degrés par rapport au plan de l'orbite terrestre. Il est ainsi possible, dans le code précédent, de rajouter une troisième coordonnée z dans les simulations permettant une visualisation en 3D.

En écrivant simplement que z=y, l'orbite d'une planète dans ce nouveau système serait comprise dans la plan incliné à 45° des deux axes (0,y) et (0,z). on choisit ainsi de faire ca pour les trajectoires de la Terre, et on module les autres coordonnées z des autres planètes par le facteur : $\tan(inclinaison)$.

Le code correspondant devient ainsi pour la planète Mercure :

```
a=0.38710;
e=0.205631;
c=e*a;
b=a*sqrt(1-e^2);
w=1/0.2408;
xmercure=a*cos(w*t)-c;
ymercure=b*sin(w*t);
inclinaison=7.0049;
zmercure=ymercure*tan(inclinaison/180*pi);
```

Les courbes obtenues sont présentées sur la *figure 9.7*, dans le repère héliocentrique et sur la *figure 9.8* dans le repère géocentrique. On se rend ainsi compte aisément que la perception des trajectoires vues de la Terre est bien plus complexe et difficiles à décrypter ...

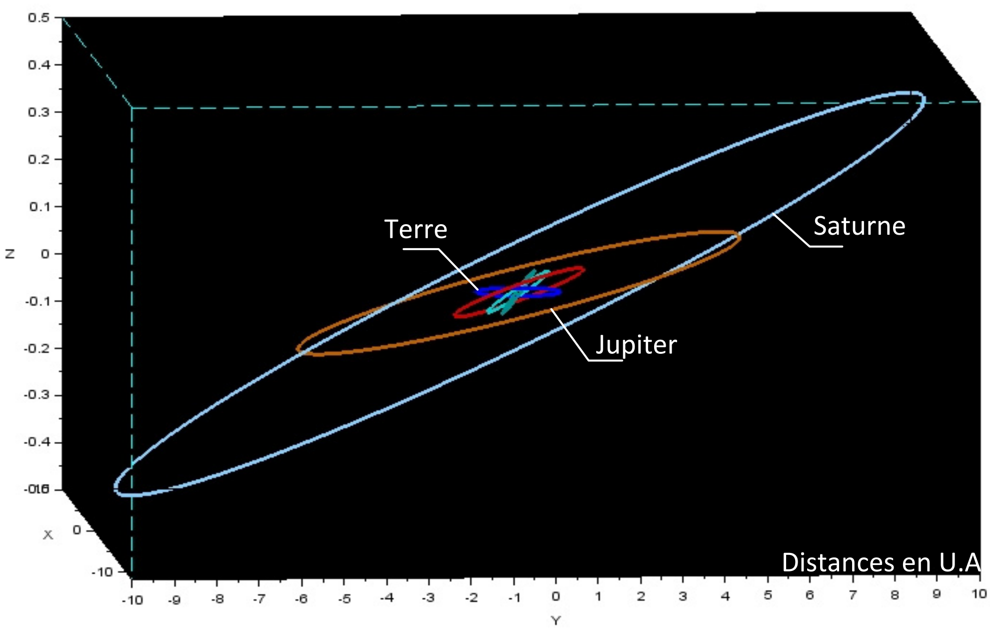

Figure 9.7 : Trajectoires en 3D – Repère Héliocentrique - horizon 30 ans

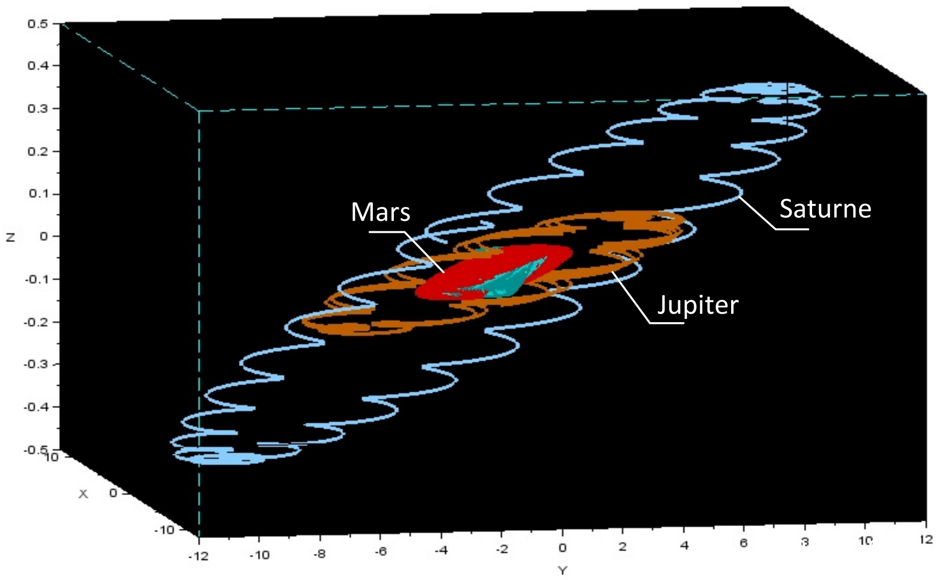

Figure 9.8 : Trajectoires en 3D – Repère Géocentrique - horizon 30 ans