Cunéiforme !

«Dans l'ancien Sumer, Gilgamesh aurait trouvé plusieurs sites d'intérêt pour Babel.»

Contrepèterie contemporaine qui n'a ni fin ni cesse

Pour ce petit problème, nous partons de la petite tablette d'argile de la *figure 11.1* qui représente de bien étranges signes. Vous aurez certainement reconnu, dès le premier regard, les empreintes caractéristiques de l'écriture « cunéiforme » qui fut inventée par les Sumériens au IIIème siècle avant JC, et qui fut ensuite utilisée ensuite sous des formes évolutives par les Akkadiens puis les Babyloniens jusqu'à l'Antiquité, soit donc entre le IIIème et le Ier millénaire avant JC.

Figure 11.1 : La tablette qui pose problème...

Un rapide coup d'œil vous révèle que cette tablette est organisée en trois colonnes et cinq lignes, et qu'elle ne fait apparaître que deux types de « caractères » distincts. Ce dernier point est crucial puisqu'il nous révèle qu'il s'agit exclusivement de nombres en écriture cunéiforme. Vous allez donc devoir vous renseigner sur la formation de ces nombres dans l'écriture et la culture Mésopotamienne (ou encore Babylonienne de façon plus ciblée), ce qui aujourd'hui grâce aux multiples ressources d'Internet n'est pas chose difficile.

Le problème que vous posera cette tablette est alors celui du décodage de ces nombres, et de la compréhension de ce qu'ils représentent dans ce cas précis. Mais le jeu ne s'arrête pas là, car une fois comprises les relations existantes entre ces nombres, il vous est demandé de compléter la tablette en déterminant les 4 lignes suivantes, en cunéiforme !

Si à tout hasard avez conçu un petit programme informatique pour vous aider à calculer les nombres suivants (en tant qu'être humain vivant au IIIéme millénaire personne ne vous le reprochera), pourquoi alors ne pas lister les 100 ou les 1000 lignes suivantes !

Le problème posé par cette tablette est donc double :

- Tout d'abord, décryptez les nombres qui y figurent en numérotation cunéiforme

- Ensuite cherchez à déterminer vous même les 4 lignes suivantes en numérotation babylonienne.

Tout d'abord, définissons correctement les différentes étapes pour poser le problème :

- ❖ En premier lieu, identifiez les différents « caractères » qui apparaissent sur la tablette.
- ❖ Ensuite, renseignez vous sur la numérotation Babylonienne et retrouvez les nombres appartenant aux différentes lignes et colonnes. Attention, à l'époque des Sumériens et des Babyloniens, le zéro n'existait pas et la notation des dizaines ou des « soixantaines » était « positionnelle ».
- ❖ Une fois les nombre décodés, essayez de trouver quelle relation les lie. Le premier triplet, de la première ligne, constitue un « grand classique » facile à identifier.
- ❖ Ainsi, trouvez une méthode permettant de générer ces triplets bien connus et calculez les 4 lignes suivantes.
- ❖ Vous vous rendrez rapidement compte qu'avec un petit programme informatique vous pourrez calculer un nombre tout à fait quelconque de lignes supplémentaires. Amusez vous alors à en générer 100 ou 1000 de plus et pensez à nos ancêtres mésopotamiens qui faisaient tous les calculs à la main, avec une numérotation plutôt complexe et d'une efficacité douteuse pour le calcul tous azimuts.

Solutions :

La numérotation cunéiforme

L'écriture cunéiforme fait partie des toutes premières écritures de l'humanité qui ont marqué le début de l'Histoire et la fin de la préhistoire. Elle fut utilisée approximativement entre le IV$^{\text{éme}}$ et le premier millénaire avant JC, autrement dit sur un très long intervalle de temps où elle subit des évolutions profondes et accompagna des civilisations changeantes.

Le principe de cette écriture reposait sur l'impression sur des tablettes d'argile fraîche (ou d'autres supports) de formes en « clous » et en « coins » (d'où le nom) à l'aide d'un stylet de bois ou de roseau appelé « calame ». La numérotation à proprement parler était basée sur un nombre très réduit de caractères, classiquement deux en numérotation néo-Babylonienne : le clou vertical désignant l'unité et le coin horizontal désignant des dizaines, comme le représente la *figure 11.2*.

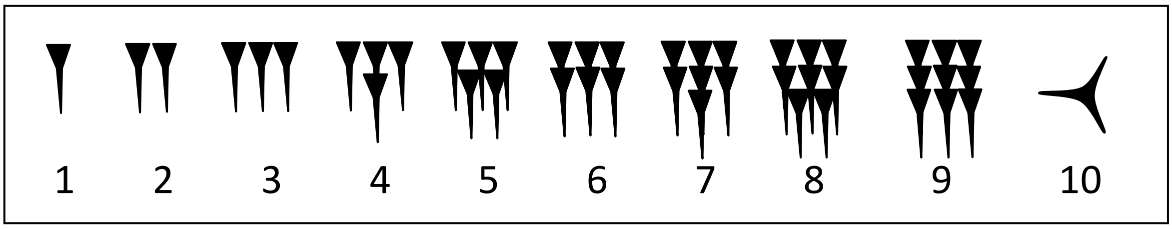


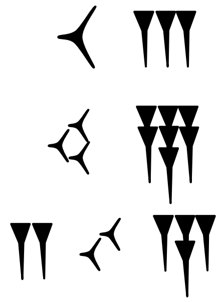
Figure 11.2 : Numérotation babylonienne

La logique de cette la numérotation était alors « cumulative », « positionnelle » et « sexagésimale », autrement dit :

- Pour noter un nombre de 1 à 9 on écrit autant de fois que nécessaire le caractère du « 1 » (le clou).
- A partir de 10 on note le caractère du « 10 » (le coin) autant de fois que le nombre comporte de dizaines, en rajoutant à droite les unités.
- Ensuite, et c'est là la particularité forte, à partir de soixante on note à gauche des dizaines (ou des unités s'il n'y a pas de dizaines, le nombre de « soixantaines » que comporte le nombre à coder.
- Pour représenter de très gros nombres, on continue la décomposition en puissances de 60 en décalant vers la gauche le nombre de 3600-aines, puis de 216000-aines, autrement dit les puissances de 60.

La numérotation « sexagésimale », est donc une sorte de mélange d'un système décimal pour les petits nombres et d'une base 60, ce qui permet d'écrire de façon très compacte de très gros nombres. **Il faut bien remarquer que nous utilisons encore aujourd'hui, de façon tout à fait quotidienne cette décomposition en base 60 dans la notation des angles en degrés, des heures, des minutes et des secondes, etc. La présence de la culture mésopotamienne et Babylonienne retentit encore dans chaque battement de nos secondes !**

Mais revenons à notre numérotation en traitant quelques exemples ci-dessous :



1x10 + 3 = 13

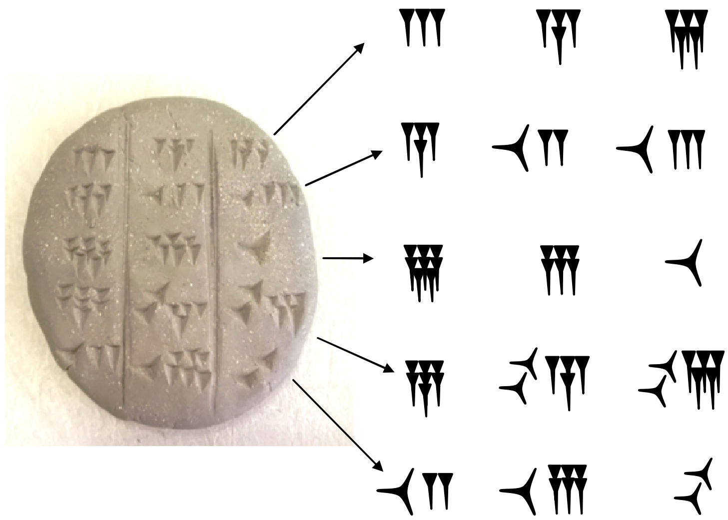
3x10 + 7 = 37

2x60 + 2x10 + 5 = 145

Figure 11.3 : Exemples

En examinant ces exemples, on comprendra au passage qu'il doit être difficile de coder les nombres tels que 60 ou 3600, qui ne diffèrent pas vraiment du 1 car il n'existait pas de caractère pour le zéro ! Il devait donc être important de « faire comprendre » au lecteur quelles positions étaient utilisées ou encore quel ordre de grandeur le nombre représentait… ce qui laisse beaucoup d'aléa possible dans l'interprétation.

Malgré tout, il devient possible de rapidement décoder les 5 lignes de la tablette, en interprétant les colonnes comme des listes de nombres suivantes :



3	4	5
5	12	13
8	6	10
7	24	25
12	16	20

Figure 11.4 : Décodage de la tablette

La première série de nombre est particulièrement évocatrice… le triplet « 3 4 5 » est en effet le plus connu des « triplets pythagoriciens », c'est-à-dire un ensemble de trois nombres (a,b,c) vérifiant le théorème de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$.

Il est alors assez tentant de penser que les autres séries représenteraient également de tels triplets, et un test rapide nous confirme qu'il s'agit bien de cela. En effet :

$$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$$

$$5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$$

$$8^2 + 6^2 = 100 = 10^2$$

$$7^2 + 24^2 = 625 = 25^2$$

$$12^2 + 16^2 = 400 = 20^2$$

Pour finir de résoudre le problème, il reste donc à trouver 4 triplets Pythagoriciens suivants ceux-ci … mais encore faut il comprendre comment ces derniers ont été trouvés.

Une première solution serait d'établir une table regroupant la somme des carrés des premiers entiers, et d'y chercher des carrés. La *figure 11.5* représente une telle table où les lignes sont indexées par le nombre entier K (1 à 20), les colonnes par le nombre entier N (1 à 15), et où chaque case représente la somme des carrés N^2+K^2.

$3^2+4^2=5^2$ $8^2+6^2=10^2$ $5^2+12^2=13^2$

N \ K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	122	145	170	197	226
2	5	8	13	20	29	40	53	68	85	104	125	148	173	200	229
3	10	13	18	25	34	45	58	73	90	109	130	153	178	205	234
4	17	20	25	32	41	52	65	80	97	116	137	160	185	212	241
5	26	29	34	41	50	61	74	89	106	125	146	169	194	221	250
6	37	40	45	52	61	72	85	100	117	136	157	180	205	232	261
7	50	53	58	65	74	85	98	113	130	149	170	193	218	245	274
8	65	68	73	80	89	100	113	128	145	164	185	208	233	260	289
9	82	85	90	97	106	117	130	145	162	181	202	225	250	277	306
10	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200	221	244	269	296	325
11	122	125	130	137	146	157	170	185	202	221	242	265	290	317	346
12	145	148	153	160	169	180	193	208	225	244	265	288	313	340	369
13	170	173	178	185	194	205	218	233	250	269	290	313	338	365	394
14	197	200	205	212	221	232	245	260	277	296	317	340	365	392	421
15	226	229	234	241	250	261	274	289	306	325	346	369	394	421	450
16	257	260	265	272	281	292	305	320	337	356	377	400	425	452	481
17	290	293	298	305	314	325	338	353	370	389	410	433	458	485	514
18	325	328	333	340	349	360	373	388	405	424	445	468	493	520	549
19	362	365	370	377	386	397	410	425	442	461	482	505	530	557	586
20	401	404	409	416	425	436	449	464	481	500	521	544	569	596	625

Figure 11.5 : Table des sommes des carrés

En cherchant patiemment dans la table des nombres qui sont eux même des carrés, on peut alors retrouver assez facilement les trois premières lignes de la tablette, mais on comprend rapidement que les carrés sommés représentant rapidement des nombres assez grands, il devient très difficile et un peu hasardeux d'y détecter les triplets suivants de façon organisée et systématique… Cette méthode n'est donc certainement pas la bonne.

Il existe alors une astuce assez connue permettant de générer des triplets Pythagoriciens : il s'agit d'utiliser intelligemment l'identité remarquable suivante :

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2.ab$$

Remplaçons a et b par N^2 et K^2 :

$$(N^2 - K^2)^2 = N^4 + K^4 - 2.N^2.K^2$$

Rajoutons alors $(2.NK)^2$:

$$(N^2 - K^2)^2 + (2.NK)^2 = N^4 + K^4 - 2.N^2.K^2 + 4.N^2.K^2 = N^4 + K^4 + 2.N^2.K^2$$

On reconnait alors dans le dernier terme : $(N^2 + K^2)^2$, et ainsi :

$$(N^2 - K^2)^2 + (2.NK)^2 = (N^2 + K^2)^2$$

Il suffit alors de choisir n'importe quel couple d'entiers N et K tels que N>K pour pouvoir former un triplet $(N^2 - K^2)$, $(2.NK)$, $(N^2 + K^2)$ qui vérifie le théorème de Pythagore !

Prenons alors des couples (N,K) tels que N>K et utilisons la formule :

N	K (<N)	N^2-K^2	2NK	N^2+K^2
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
3	1	8	6	10
4	3	5	24	25
4	2	12	16	20
Il suffit ainsi de continuer pour obtenir les 4 lignes suivantes :				
4	1	**15**	**8**	**17**
5	4	**9**	**40**	**41**
5	3	**16**	**30**	**34**
5	2	**21**	**20**	**29**

Ainsi, la fin de la résolution de notre problème vient avec l'encodage des nombres en numérotation cunéiforme, ce qui donne les lignes suivantes :

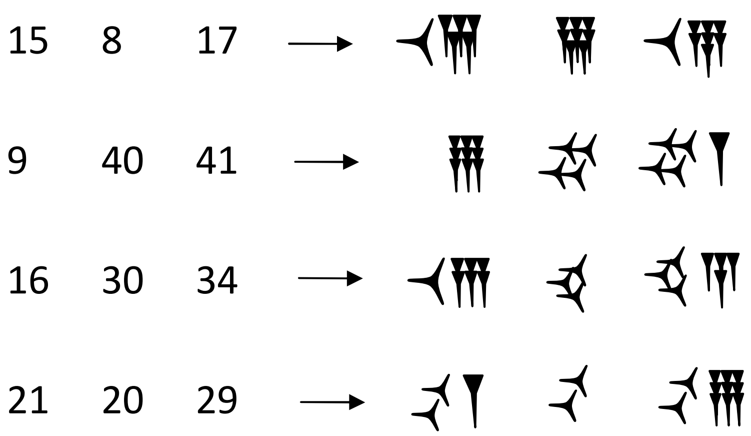


Figure 11.6 : Les quatre lignes suivantes de la tablette

Tel que c'est suggéré dans le problème, il suffirait d'utiliser un ordinateur associé à un quelconque logiciel mathématique ou langage de programmation pour automatiser le calcul et générer des milliers de lignes suivantes. A titre d'exemple, le code suivant a été écrit pour le logiciel Matlab, ou encore Octave (qui est libre). Sur la *figure 11.7*, la fenêtre supérieure présente le code, et la fenêtre inférieure (fenêtre de commande) liste sur des lignes successives les entiers N , K, ainsi que les triplets formés. Le calcul représenté expose le tout début du tableau réalisé pour N compris entre 1 et 5. On y retrouve les données du problème et de la solution…

Editeur

Fichier Editer Affichage Déboguer Exécuter Aide

triplets.m

```
Nmax=5;
tab=zeros(Nmax,5);
index=1;
for N=2:1:Nmax
  for K=(N-1):-1:1
    tab(index,1)=N;
    tab(index,2)=K;
    tab(index,3)=N^2-K^2;
    tab(index,4)=2*N*K;
    tab(index,5)=N^2+K^2;
    index=index+1;
  endfor
 endfor
 disp(tab);
```

ligne: 1 col: 5 encodage : SYSTEM fin de ligne: CRLF

Fenêtre de commandes

2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
3	1	8	6	10
4	3	7	24	25
4	2	12	16	20
4	1	15	8	17
5	4	9	40	41
5	3	16	30	34
5	2	21	20	29
5	1	24	10	26

>>

Figure 11.7 : Programme sous Octave (ou Matlab) et 10 premiers triplets

La *figure 11.8* représente à titre d'exemple une saisie d'écran d'une partie du tableau obtenu pour N compris entre 500 et 501.

Fenêtre de commandes

500	499	999	499000	499001
500	498	1996	498000	498004
500	497	2991	497000	497009
500	496	3984	496000	496016
500	495	4975	495000	495025
500	494	5964	494000	494036
500	493	6951	493000	493049
500	492	7936	492000	492064
500	491	8919	491000	491081
500	490	9900	490000	490100
500	489	10879	489000	489121
500	488	11856	488000	488144
500	487	12831	487000	487169
500	486	13804	486000	486196

Figure 11.8 : Triplets autour de N=500

Pour finir, il vous faudra savoir, mais c'était peut être évident pour vous, que cette petite tablette est une imposture. C'est moi qui l'ai réalisée sur un coin de table avec un peu d'argile fourni par une amie, et très certainement avec l'habileté que les Sumériens et les scribes Babyloniens auraient attribué à un enfant débutant. Mais si malgré tout ce petit problème vous a intéressé, n'hésitez pas à vous renseigner sur les véritables tablettes Sumériennes, ou plus largement Mésopotamiennes, retrouvées par milliers trois à cinq millénaires après avoir été écrites (nous devrions dire « imprimées »). Si la grande majorité relève plutôt de l'exercice scolaire, ou encore du « livre de compte » et du « relevé de propriétés notarié », certaines présentent des listes de nombres tout à fait intéressantes. A priori, les Mésopotamiens connaissaient bien avant Pythagore un grand nombre de triplets, ou encore des approximations tout à fait convaincantes de π ou de $\sqrt{2}$ comme est supposée le révéler la tablette YBC7289 représentée ci-dessous.

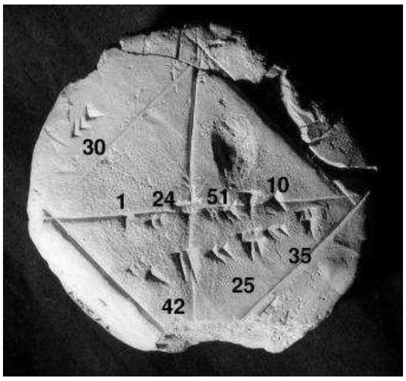


Figure 11.9 : Approximation de $\sqrt{2}$ en sexagésimal : $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1{,}41421296$.

Cette tablette, datant d'environ 1900 avant JC est sujette à interprétation, mais semble clairement délivrer un chiffrage de la diagonale du carré.

Il faut alors comprendre que la numérotation Babylonienne, et les mathématiques de l'époque, répondaient aux problèmes posés par des listes de solutions, alors que les mathématiques modernes basées sur l'Algèbre présentent plutôt des résolutions générales rassemblées en « formules » ou en « méthodes » étayées par des théorèmes. Même si l'abstraction semblait très peu présente dans les calculs de l'époque, certaines tablettes témoignent de l'ampleur des calculs et des recherches numériques qui ont été faites à l'époque. Renseignez vous : c'est passionnant !